Mit einem modifizierten Sieb des Eratosthenes erzeugte Zahlenfolgen

Roland Uhl
Technische Hochschule Brandenburg*

25. Juni 2017

Zusammenfassung

Das Sieb des Eratosthenes wird mit einer größeren Anfangszahl als der 2 durchgeführt, sodass nicht nur Primzahlen übrig bleiben. Von der sich ergebenden Folge wird die größte zusammengesetzte Zahl bestimmt.

Konstruktion der Zahlenfolgen

Mit dem Sieb des Eratosthenes lässt sich bekanntlich die Folge der Primzahlen bestimmen. Wir nehmen aber dabei als Anfangszahl statt der 2 hier eine ganze Zahl $a > 2$, was durch Überlegungen von Prof. Dr. Guido Kramann angeregt wurde.[1]

So gehen wir von sämtlichen ganzen Zahlen $\geq a$ aus: a, $a+1$, $a+2, \ldots$. Davon werden nun alle echten Vielfachen von a gestrichen. Die Zahl $a+1$ bleibt ungestrichen, und so streichen wir noch deren echte Vielfache. Dann werden auch von der auf $a+1$ folgenden ungestrichenen Zahl alle echten Vielfachen gestrichen und so fort. Bei der sich ergebenden Zahlenfolge folgt also auf jedes Glied die nächstgrößere ganze Zahl, die durch keines der vorhergehenden Glieder teilbar ist.

Beispielsweise erhalten wir für die Anfangszahl $a = 7$ die Folge der Zahlen

$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \ldots$$

(gestrichen wurden $14, 21, 28, \ldots$, danach $16, 24, \ldots$, dann $18, 27, \ldots$ usw.).

*Postfach 2132, 14737 Brandenburg an der Havel; roland.uhl@th-brandenburg.de; Homepage: https://www.th-brandenburg.de/~uhl/

[1] Kramann (ebenfalls Technische Hochschule Brandenburg) erdachte sich dieses Verfahren, um damit Frequenzen von Tönen zu generieren, die sich gut voneinander trennen lassen. Dazu wird die Grundfrequenz von beispielsweise 44 100 Hz durch die erzeugten ganzen Zahlen geteilt.

Für $a = 12$ ergibt sich

$$12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37,$$
$$41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 97, 101, 103,$$
$$107, 109, 113, 121, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, \ldots.$$

Die Primzahlen in beiden Folgen sind schwarz geschrieben, die zusammengesetzten Zahlen rot.

Charakterisierung der Folgeglieder

Allgemein lassen sich die Zahlen in der betreffenden Folge mit Anfangszahl $a > 2$ charakterisieren durch

Satz 1. *Eine ganze Zahl $n \geq a$ ist genau dann ein Folgeglied, wenn für ihren kleinsten Primfaktor p_1 die Ungleichung $\frac{n}{p_1} < a$ gilt.*

Beweis. Diese Zahl n erscheint in der Folge, wenn alle ihre echten Teiler kleiner als a sind, wenn also ihr größter echter Teiler $\frac{n}{p_1}$ so ist. Wenn dagegen $\frac{n}{p_1} \geq a$ gilt, dann muss von der Zahl n zumindest ihr kleinster echter Teiler $\geq a$ in der Folge auftauchen (dessen echte Teiler sind ja kleiner als a), und so ist aber n kein Folgeglied. □

Größtes zusammengesetztes Glied

Sämtliche Primzahlen $\geq a$ kommen offenbar in der jeweiligen Folge vor. Die anderen Glieder sind beschränkt gemäß

Satz 2. *Das größte zusammengesetzte Folgeglied ist p^2 mit der größten Primzahl $p < a$.*

So ist in der Folge mit Anfangszahl $a = 7$ bzw. $a = 12$ (s. o.) die größte zusammengesetzte Zahl demnach $5^2 = 25$ bzw. $11^2 = 121$; danach kommen also nur noch Primzahlen.

Beweis. Wir verwenden mehrmals die Ungleichung

$$2p > a, \tag{1}$$

die sich aus der Existenz einer Primzahl zwischen p und $2p$ ergibt (Bertrandsches Postulat). Mit $p^2 \geq 2p$ folgt zunächst $p^2 > a$. Die zusammengesetzte Zahl p^2 ist ein Folgeglied etwa gemäß Satz 1, weil noch für ihren einzigen Primfaktor p ja $\frac{p^2}{p} = p < a$ gilt.

Um zu zeigen, dass eine zusammengesetzte Zahl $n > p^2$ aber kein Folgeglied sein kann, gehen wir von ihrer Primfaktor-Zerlegung

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r \qquad (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r) \tag{2}$$

mit $r \geq 2$ Faktoren aus. Aufgrund von Satz 1 genügt es, die Ungleichung $\frac{n}{p_1} \geq a$, also

$$p_2 p_3 \cdots p_r \geq a \tag{3}$$

nachzuweisen. Dazu unterscheiden wir vier Fälle.

Fall 1: $r = 2$. Dann gilt

$$p_2^2 \geq p_1 p_2 = n > p^2$$

und somit $p_2 > p$. Weil es zwischen p und a keine Primzahl gibt, folgt $p_2 \geq a$, also Ungleichung (3).

Fall 2: $r = 3$ *und* $p_3 \leq 3$. Für die drei Primfaktoren in (2) gibt es hier nur vier Möglichkeiten:

p_1	p_2	p_3	n	p_2p_3	p	a
2	2	2	8	4	2	3
2	2	3	12	6	≤ 3	≤ 5
2	3	3	18	9	≤ 3	≤ 5
3	3	3	27	9	≤ 5	≤ 7

(für die p-Spalte wird $n > p^2$ berücksichtigt). Offensichtlich ist hier $p_2 p_3 \geq a$ jeweils erfüllt.

Fall 3: $r = 3$ *und* $p_3 \geq 4$. Dann ist

$$(p_2 p_3)^2 = p_3 p_2 \cdot p_2 p_3 \geq 4 p_1 \cdot p_2 p_3 = 4n > 4p^2$$

und damit $p_2 p_3 > 2p$. Mit Hilfe von (1) folgt auch hier die Ungleichung $p_2 p_3 \geq a$.

Fall 4: $r \geq 4$. Nun gilt

$$(p_2 p_3 \cdots p_r)^2 \geq p_2 p_3 p_4 \cdot p_2 p_3 \cdots p_r \geq 2 \cdot 2 p_1 \cdot p_2 p_3 \cdots p_r = 4n > 4p^2.$$

Daraus folgt $p_2 p_3 \cdots p_r > 2p$ und mit (1) die Ungleichung (3) auch in diesem letzten Fall. $\square$