Eine rigid-analytische Version des Artinschen Glättungssatzes

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

Vorgelegt im Jahre 2006 von

Andreas Martin aus Kirchheim/Teck

Dekan:	Prof. Dr. Ulrich Stadtmüller
1. Gutachter:	Prof. Dr. Werner Lütkebohmert
2. Gutachter:	Priv.-Doz. Dr. Stefan Wewers
Tag der Promotion:	9. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Es sei $R \subseteq \overline{R}$ ein Paar von Ringen, wobei $\overline{R}$ vollständig bewertet sei, und R sei ein dichter Unterring von $\overline{R}$. Dann kann man folgenden Satz betrachten.

Approximationssatz *Es sei* $(p_i)_{i \in I}$ *ein System von Polynomen in* $R[Y] = R[Y_1, \ldots, Y_N]$. *Es sei* $\overline{y} \in \overline{R}^N$ *eine Lösung des Gleichungssystems* $p_i(Y) = 0$, $i \in I$. *Dann gibt es Lösungen* $y \in R^N$ *desselben Gleichungssystems, welche beliebig nahe an* $\overline{y}$ *liegen.*

Dieser Satz ist wohlbekannt in den folgenden Fällen.

- $\overline{R}$ ist ein vollständig bewerteter Körper der Charakteristik 0, und R ist ein dichter Unterkörper von $\overline{R}$, welcher algebraisch abgeschlossen in $\overline{R}$ sei. (S. Lang, [15])
- $R = K\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ ist die Algebra der konvergenten Potenzreihen in endlich vielen Unbestimmten über einem vollständig bewerteten Körper K der Charakteristik 0, und $\overline{R} = K[\![\zeta_1, \ldots, \zeta_n]\!]$ ist die Algebra der formalen Potenzreihen über K. (M. Artin, [1])

Im Jahre 1981 veröffentlichte S. Bosch eine rigid-analytische Version des Artinschen Satzes. Es sei dazu K ein vollständiger nicht-archimedisch bewerteter Körper, und für jedes $c \in \sqrt{|K^*|}$ sei

$$K\langle c^{-1}\zeta\rangle \;=\; \{f \in K[\![\zeta_1, \ldots, \zeta_n]\!]\;;\; f \text{ konvergiert auf } \mathbb{D}^n(c)\}$$

die Algebra der Potenzreihen in n Unbestimmten über K, welche auf dem n-dimensionalen Ball $\mathbb{D}^n(c)$ mit Radius c konvergieren. Man setze

$$R \;:=\; K\langle\zeta\rangle_\dagger \;:=\; \varinjlim_{c>1} K\langle c^{-1}\zeta\rangle \;\subseteq\; \overline{R} \;:=\; K\langle\zeta\rangle\,.$$

Dann gilt der obige Approximationssatz für $R \subseteq \overline{R}$, d.h. eine Lösung $\overline{y} \in \overline{R}^N$ des Gleichungssystems, welche auf dem Ball mit Radius 1 konvergiert und $|\overline{y}|_{\mathrm{sup}} \leq 1$ erfüllt, kann durch eine Lösung $y \in R^N$ approximiert werden, welche auf einem „etwas größeren" Ball konvergiert.

Tatsächlich behauptet Bosch in [10] eine noch allgemeinere Version des Approximationssatzes. Es seien dazu

$$A \;:=\; K\langle\xi\rangle \;=\; K\langle\xi_1, \ldots, \xi_m\rangle$$

mit Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_m$, und

$$A\langle\zeta\rangle_\dagger \ := \ \varinjlim_{c>1} A\langle c^{-1}\zeta\rangle$$

die Algebra der formalen Potenzreihen in Unbestimmten $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ über A, welche auf einem Ball mit einem Radius etwas größer als 1 konvergieren. Dann wird der Approximationssatz für das Paar $(A\langle\zeta\rangle_\dagger, A\langle\zeta\rangle)$ anstelle von $(R, \overline{R})$ behauptet. Weiterhin dürfen die p_i dort sogar Potenzreihen sein, welche auf einem etwas größeren Ball konvergieren. Genauer sei vorausgesetzt

$$p_i \ \in \ A\langle\zeta, Y\rangle_\dagger$$

mit Unbestimmten $Y_1, \ldots, Y_N$. Zum Beweis werden dort die Methoden aus Artins Arbeit ([1]) an diese Situation angepaßt. Dabei spielt der Weierstraßsche Vorbereitungssatz eine zentrale Rolle. Insbesondere wird verwendet, daß bei geeigneter Wahl der Koordinaten ξ, ζ jedes Element von $A\langle\zeta\rangle_\dagger$ ein Weierstraßdivisor ist. Das gilt jedoch für diese Algebra nicht, sofern die Unbestimmten ξ auftreten. Die Behauptung bleibt richtig, falls die ξ nicht auftreten, d.h. falls $A = K$.

Erlaubt man das Auftreten der ξ, so erhält man eine relative Version des Approximationssatzes, welche ein Analogon zu einer entsprechenden Aussage über Schemata vom endlichen Typ

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \operatorname{Spec} R[\xi][\![\zeta]\!] \, , \\ S &= \operatorname{Spec} R[\xi][\zeta] \end{aligned}$$

wäre. Dieser Fall ist unbekannt und würde einen Approximationssatz für henselsche Paare (siehe [18], chapitre IX) nach sich ziehen, d.h. eine Lösung des Gleichungssystems über der (ζ)-adischen Komplettierung $\hat{S}$ könnte durch eine Lösung über der Henselisierung von S im Ideal (ζ) approximiert werden. Dies bedeutet, daß eine Lösung über einer étalen Erweiterung $S' \to S$ existierte, welche über $\zeta = 0$ ein Isomorphismus wäre.

In dieser Arbeit werde ich die absolute Version des Approximationssatz für das Paar $(K\langle\zeta\rangle_\dagger, K\langle\zeta\rangle)$ mit Hilfe des Artinschen Glättungssatz beweisen. Die hier verwendeten Methoden beruhen auf den Beweisen in [9] und werden in der Einleitung erklärt.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Der artinsche Approximationssatz

Es sei A die Henselisierung einer Lokalisierung einer endlich erzeugten Algebra über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring. Zum Beispiel betrachte man den Polynomring $k[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ über einem vollständig bewerteten Körper k. Dann kann man für A die Henselisierung der Lokalisierung von $k[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ im Ideal $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ wählen. Da der Ring der konvergenten Potenzreihen $k\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ henselsch ist, können die Elemente von A als konvergente Potenzreihen dargestellt werden.

Es sei $\mathrm{f}(Y) = 0$ ein polynomiales Gleichungssystem über A. Im Jahre 1969 bewies M. Artin, daß sich eine Lösung $\hat{\mathrm{a}} \in \hat{A}^N$ von $\mathrm{f}(Y) = 0$ in der Komplettierung $\hat{A}$ stets durch eine Lösung in A approximieren läßt, siehe [2]. Im Spezialfall der konvergenten Potenzreihen bedeutet das also, daß eine Lösung, die in Form von formalen Potenzreihen gegeben ist, sich durch eine Lösung in Form von konvergenten Potenzreihen approximieren läßt.

In der Sprache der Schemata übersetzt findet man zu jedem $\hat{A}$-wertigen Punkt $\sigma : \operatorname{Spec} \hat{A} \to X$ eines Schemas X über $\operatorname{Spec} A$ vom endlichen Typ einen A-wertigen Punkt $\sigma' : \operatorname{Spec} A \to X$, der mit σ' modulo dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_A$ von A übereinstimmt.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd] & & \\
& \operatorname{Spec} A \arrow[ul, dashed, "\sigma'"'] \arrow[dl] & \operatorname{Spec} \hat{A} \arrow[l] \arrow[ull, "\sigma"'] \arrow[dll] \\
\operatorname{Spec} A & &
\end{tikzcd}$$

Eine alternative Formulierung dieses Satzes ist, daß der Ring A die Approximationseigenschaft hat.

Dieser Satz ist wohlbekannt, falls X glatt über $\operatorname{Spec} A$ ist. Im Spezialfall des Rings der konvergenten Potenzreihen über den komplexen Zahlen läßt sich dies mit rein analytischen Methoden unter Verwendung des Satzes über umkehrbare Abbildungen beweisen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Ring $\mathbb{C}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ henselsch ist. Wir wollen dies kurz ausführen. Es sei X glatt über S von der Dimension n, wobei S ein Ball um den Punkt s mit Radius r sei. Es sei $x \in X$ ein Punkt über s. Dann gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ mit $x \in V(f_1, \ldots, f_n)$ derart, daß $V(f_1, \ldots, f_n)$ quasiendlich in x über S ist und die Differentiale $df_1, \ldots, df_n$ im Punkt x linear unabhängig in $\Omega_{X/S}$ sind. Dann ist $V(f_1, \ldots, f_n)$ in x eine Mannigfaltigkeit und die Abbildung

$$V(f_1, \ldots, f_n) \rightarrow S$$

erfüllt die Bedingungen des Satzes über umkehrbare Abbildungen. Sie induziert also einen Isomorphismus von einer Umgebung von x auf eine Umgebung von s. Die lokale Umkehrung dieser Abbildung erlaubt es, einen Schnitt von einer Umgebung von s in X durch x zu definieren.

Der allgemeine Fall kann auf eine raffinierte und technisch anspruchsvolle Weise auf den glatten Fall zurückgeführt werden. Man konstruiert eine Glättung X^g über X derart, daß sich der $\hat{A}$-wertige Punkt von X durch einen $\hat{A}$-wertigen Punkt von X^g approximieren läßt. Man konstruiert also ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X^g \arrow[d, dashed] & \\
X \arrow[d] & \operatorname{Spec} \hat{A} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ul, dashed, "\sigma^g"'] \arrow[dl] \\
\operatorname{Spec} A &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

so, daß X^g glatt über $\operatorname{Spec} A$ ist. Dies geschieht durch Ersetzen aller Koeffizienten aller gegebenen Gleichungen durch Unbestimmte und eine trickreiche Anwendung der Weierstraßschen Division, siehe [3] bzw. [9], 3.6.

1.2 Glättung und Approximation für rigide Räume

Es sei K ein vollständiger diskret bewerteter Körper mit Parameter π. Es sei

$$S \;=\; \mathbb{D}^n_K(1+\varepsilon)$$

der n-dimensionale Ball vom Radius $1+\varepsilon$ über K. Die Funktionen auf S entsprechen den formalen Potenzreihen in n Unbestimmten über K, die auf dem Ball mit Radius $1+\varepsilon$ konvergieren. Es sei

$$X \;=\; V(\mathrm{f}) \subseteq \mathbb{D}^N_S$$

die Nullstellenmenge eines Systems von strikt konvergenten Potenzreihen $\mathrm{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ mit $f_i \in A\langle Y_1, \ldots, Y_N\rangle$, wobei $A := \mathcal{O}_S(S)$. Es sei

$$\hat{S} \;:=\; \mathbb{D}^n_K(1)$$

und

$$\mathrm{f}(\hat{\mathrm{a}}) \;=\; 0\,, \;\; \hat{\mathrm{a}} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_N) \;\text{ mit }\; \hat{a}_i \in \mathcal{O}_{\hat{S}}(\hat{S})$$

eine Lösung des Gleichungssystems $\mathrm{f}(Y) = 0$ in der Form von Potenzreihen, die auf dem Ball mit Radius 1 konvergieren. Wir wollen die Lösung a approximieren auf

$$S' \;:=\; \mathbb{D}_K^n(1+\delta)$$

für ein $0 < \delta < \varepsilon$, d.h. wir suchen eine Lösung a' in Form von Potenzreihen, die auf einem Ball mit größerem Radius $1+\delta$ konvergieren, derart, daß a' nahe bei a liegt.

Wir wollen die Fragestellung in die Sprache der rigiden Räume und in ein Diagramm übersetzen. Die Lösung $\hat{\mathrm{a}}$ induziert einen S-Morphismus $\sigma : \hat{S} \to X$. Wir werden eine Relation „relativ S-kompakt in", in Zeichen $U \Subset_S X$, für einen Teilbereich U eines rigiden Raumes X über S derart definieren, daß $\mathbb{D}_S^N(c) \Subset_S \mathbb{D}_S^N(c')$ genau dann gilt, wenn $c < c'$. Anschaulich soll dies bedeuten, daß U echt im Innern von X liegt. Dann läßt sich die Situation durch folgendes Diagramm darstellen.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_S^N \supseteq & X \arrow[dd] & & \\
 & & S' \arrow[ul, dashed, "\sigma'"] \arrow[dl, dashed, hook] \arrow[r, phantom, "\Subset"] & \hat{S} \arrow[ull, "\sigma"'] \arrow[dll, hook] \\
 & S & &
\end{tikzcd}$$

Gegeben ist also $\hat{S} \Subset S$ und ein Morphismus $\sigma : \hat{S} \to X$ mit der zusätzlichen Voraussetzung

$$\sigma(\hat{S}) \;\Subset_S\; X\,,$$

sowie ein vorgegebenes $\lambda_0 > 0$. Gesucht ist ein $\hat{S} \Subset S' \subseteq S$ und ein $\sigma' : S' \to X$ derart, daß σ und σ' modulo π^{λ_0} übereinstimmen.

Die Zusatzvoraussetzung $\sigma(\hat{S}) \Subset_S X$ ist im allgemeinen notwendig für die Existenz, wie man wie man anhand der Wahl $X := \hat{S}$ und $\sigma := \mathrm{id}$ sieht. Wir bemerken noch, daß diese Voraussetzung stets erfüllt ist, falls $X \to S$ eigentlich ist.

Im Falle X glatt über S ist diese Aussage relativ einfach zu beweisen, aber nicht vergleichbar mit dem Fall im vorigen Paragraphen. Die Aussagen folgen nämlich aus den Approximationstechniken des Lemmas von Elkik ([12], Seite 555). Dieses sagt aus, daß man eine Näherungslösung $\sigma_\lambda : S' \to \mathbb{D}_S^N$, gegeben durch $\mathrm{a}^\lambda \in A^N$ mit

$$\mathrm{f}(\mathrm{a}^\lambda) \;\equiv\; 0 \quad \mathrm{mod}\; \pi^\lambda\,,$$

analog zum Newton-Verfahren zu einer verbesserten Näherungslösung $\sigma_{\lambda+1} : S' \to \mathbb{D}_S^N$ liften kann, d.h. man findet ein $\mathrm{a}^{\lambda+1} \in A^N$, welches

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^{\lambda+1} &\equiv \mathrm{a}^{\lambda} \mod \pi^{\lambda-h} \\ \mathrm{f}(\mathrm{a}^{\lambda+1}) &\equiv 0 \mod \pi^{\lambda+1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

erfüllt. Der Parameter h, der die Übereinstimmung der Näherungslösungen regelt, ergibt sich aus der Glattheitsbedingung von X über S. Diese übersetzt sich nämlich in eine Bedingung, in der gewisse Minoren der Jacobimatrix

$$M(\hat{\mathrm{a}}) := \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)(\hat{\mathrm{a}}) \tag{1.3}$$

nach unten durch π^h für ein gewisses h abgeschätzt werden können.

Falls geeignete Bedingungen an die Näherungslösung σ_λ erfüllt sind, so konvergieren diese Näherungslösungen gegen eine tatsächliche Lösung σ' auf S', die mit σ modulo π^{λ_0} übereinstimmt.

Wir wollen kurz ausführen, wie man ausgehend von a^λ eine Liftung $\mathrm{a}^{\lambda+1}$ findet, welche (1.2) genügt. Dazu reduzieren wir die Potenzreihen f modulo $\pi^{2\lambda}$ und liften sie zu Polynomen f^* in $A[Y_1, \ldots, Y_N]$. Wir setzen mit $\mathrm{a}^{\lambda+1} = \mathrm{a}^\lambda - \mathrm{y}$ und einer Taylorentwicklung

$$\mathrm{f}^*(\mathrm{a}^{\lambda+1}) = \mathrm{f}^*(\mathrm{a}^\lambda - \mathrm{y}) = \mathrm{f}^*(\mathrm{a}^\lambda) - M^*(\mathrm{a}^\lambda)\mathrm{y} + \sum_{i,j} Q_{ij}(\mathrm{a}^\lambda, \mathrm{y}) y_i y_j \tag{1.4}$$

an, wobei M^* entsprechend zu (1.3) die Jacobimatrix zu den Polynomen f^* sei. Die Abschätzung jener Minoren durch π^h impliziert eine analoge Abschätzung der entsprechenden Minoren von $M^*(\mathrm{a}^\lambda)$ durch π^h. Mit Mitteln der linearen Algebra findet man damit ein $\mathrm{y} \in A^N$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &\equiv 0 && \mod \pi^{\lambda-h} \\ \pi^h \mathrm{f}^*(\mathrm{a}^\lambda) &\equiv \pi^h M^*(\mathrm{a}^\lambda)\mathrm{y} && \mod \pi^{2\lambda}. \end{aligned}$$

Kürzt man diese Gleichung mit π^h und verbindet sie mit der Taylorentwicklung (1.4), und setzt man darüberhinaus $\lambda > 2h$ voraus, so erhält man die Lösung $\mathrm{a}^{\lambda+1} := \mathrm{a}^\lambda - \mathrm{y}$ von (1.2). Auf diese Weise bekommt man eine Liftung $\sigma_{\lambda+1} : S' \to \mathbb{D}_S^N$ von σ^λ, die noch nicht nach X abbildet, sich aber besser an X anschmiegt als σ_λ. Dabei lassen sich die Minoren entlang der Liftung $\mathrm{a}^{\lambda+1}$ durch dasselbe π^h abschätzen.

Um die tatsächliche Lösung $\sigma' : S' \to X$ über einem echt größeren Teilbereich $S' \subseteq S$ mit $\hat{S} \Subset S'$ zu erhalten, konstruiert man zunächst eine Näherungslösung a^λ zu dem Level $\lambda := \lambda_0 + h$. Man verwendet die Bedingung $\sigma(\hat{S}) \Subset_S X$, um ein $\delta > 0$ und $S' = \mathbb{D}_K^n(1+\delta)$ zu finden, so daß a^λ einen Morphismus $\sigma_\lambda : S' \to \mathbb{D}_S^N$ induziert, der i.a. noch nicht nach X abbildet, und die Situation des Lemmas von Elkik erzeugt. Wir können dann sukzessive Näherungslösungen $\sigma_\lambda, \sigma_{\lambda+1}, \ldots$ konstruieren derart, daß σ_μ und σ_ρ auf dem Level $\mu - h$ übereinstimmen für alle $\rho \geq \mu \geq \lambda$. Somit fügen sich die Näherungslösungen zu einer tatsächlichen Lösung $\sigma' : S' \to X$ zusammen.

Im allgemeinen Fall ist es möglich, analog zum Diagramm (1.1) eine gewisse Glättung X^g von X zu konstruieren, um die Aussage auf den glatten Fall zurückzuführen. Wir werden dies beweisen, wenn X und S affinoid sind und $\hat{S} \Subset S$ eine spezielle Gestalt hat, nämlich die eines Weierstraßbereiches. Dies kann auf den Fall

$$\hat{S} := \mathbb{D}^n_K(1) \Subset S := \mathbb{D}^n_K(c) .$$

zurückgeführt werden, wobei $|c| > 1$. Unter diesen Voraussetzungen wird der Hauptsatz der folgende Arbeit bewiesen.

Satz 5.1.1 (Glättungssatz) *Es seien K ein vollständiger nicht-archimedisch bewerteter Körper, und $c_1, \ldots, c_n$, S und $\hat{S}$ seien wie oben definiert . Es seien ferner X ein affinoider S-Raum und σ ein $\hat{S}$-wertiger Punkt von X derart, daß $\sigma(\hat{S}) \Subset_S X$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm affinoider Räume*

$$\begin{tikzcd}
X^g \arrow[d, dashed] & \\
X \arrow[d] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ul, dashed, "\sigma^g"'] \arrow[dl] \\
S &
\end{tikzcd}$$

derart, daß $X^g \to S$ rig-glatt ist und daß $\sigma^g(\hat{S}) \Subset_S X^g$ gilt.

Dazu wird auf sehr technische Weise ein Diagramm der folgenden Art konstruiert.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend left, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{D}^{lN}_U \arrow[l, "p"] \arrow[dl, "\varrho"] & X^g \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \\
\mathbb{D}^N_S \arrow[d] & & X \arrow[ll, hook'] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ul, "\sigma^g"'] \arrow[ulll, "\psi"] \arrow[dlll] \\
S & & &
\end{tikzcd}$$

Man führt eine Induktion nach der Anzahl n der Unbestimmten. Zunächst kann man annehmen, daß $\sigma^*\Delta^2$ ein Weierstraßdivisor ist, wobei Δ ein Minor der Jacobimatrix ist. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz liefert eine Gleichung, in der dann alle Koeffizienten durch Unbestimmte ersetzt werden. Dies liefert ein größeres Gleichungssystem, welches in $n - 1$ Unbestimmten gelesen werden kann. Die Induktionshypothese liefert dann das Schema U und die Abbildungen α und ψ, wobei U glatt über S ist, $\psi(\hat{S}) \Subset_S U$ gilt und $\alpha^*\Delta^2$ gewisse Teilbarkeitsrelationen erfüllt. Dann definiert man einen Morphismus $\mathbb{D}_U^{lN} \to \mathbb{D}_S^N$, der formal die Taylorentwicklung in Unbestimmten imitiert, und definiert X^g als den Teilbereich davon, auf dem die X definierenden Gleichungen erfüllt sind. Mit Hilfe des Nullschnitts τ erhält man so die gewünschte Glättung $X^g \to X$ über S. Die relative Kompaktheit von $\sigma^g(\hat{S})$ in X^g ist dabei in die Gleichungen eingebaut, die X^g über $\mathbb{D}_S^N$ definieren.

Der Approximationssatz folgt dann aus den Approximationstechniken von Elkik im glatten Fall.

Im letzten Kapitel werden Anwendungen der Approximation und Ausdehnung von Morphismen auf die Struktur eigentlicher rigider Gruppen erklärt.

Kapitel 2

Rigide Geometrie

2.1 Tate-Algebren

Es seien k ein Körper mit einer vollständigen nicht-trivialen nicht-archimedischen Bewertung und $n \in \mathbb{N}_0$. Es seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ Unbestimmte über k . Wir verwenden stets Multiindexschreibweise, d.h. wir schreiben

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

und

$$\begin{aligned} \zeta^\nu &:= \zeta_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{\nu_n} \\ |\nu| &:= \nu_1 + \ldots + \nu_n \end{aligned}$$

für beliebige $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}_0$. Die *Tate-Algebra* in n Unbestimmten über k ist definiert als

$$\begin{aligned} T_n(k) &:= k\langle\zeta\rangle = k\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle \\ &:= \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} a_\nu \zeta^\nu \; ; \; a_\nu \in k \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}_0^n, \lim_{|\nu| \to \infty} |a_\nu| \to 0 \right\} . \end{aligned}$$

Sie ist eine Unteralgebra der k-Algebra $k[\![\zeta_1, \ldots, \zeta_n]\!]$ der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten über k. Die Elemente von $T_n(k)$ heißen *strikt konvergente Potenzreihen.* Auf $T_n(k)$ betrachten wir die *Gauß-Norm*

$$\left| \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} a_\nu \zeta^\nu \right| := \max \{ |a_\nu| \; ; \; \nu \in \mathbb{N}_0^n \} .$$

Es handelt sich hierbei um eine k-Algebra-Norm im Sinne von [4]. Mit dieser Norm wird $T_n(k)$ zu einer Banachalgebra, d.h. sie ist vollständig. Ferner ist der Polynomring $k[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ dicht in $T_n(k)$.

Man kann die Elemente von $f \in T_n(k)$ auch als Funktionen

$$\begin{aligned} \{(x_1, \ldots, x_n) \in (k^a)^n \; ; \; |x_i| \le 1, \; i = 1, \ldots, n\} =: \mathbb{D}^n_{k^a} &\longrightarrow k^a , \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

auffassen. Dabei bezeichne k^a den algebraischen Abschluß von k. Die Elemente von $T_n(k)$ entsprechen eineindeutig denjenigen Funktionen $\mathbb{D}^n_{k^a} \to k^a$, welche durch eine Potenzreihenentwicklung dargestellt werden, die auf $\mathbb{D}^n_{k^a}$ konvergiert, und welche $\mathbb{D}^n_k$ nach k abbilden. Die durch ein Element $f \in T_n(k)$ auf diese Weise definierte Funktion $\mathbb{D}^n_{k^a} \to k^a$ ist äquivariant unter der Operation der absoluten Galoisgruppe $\Gamma := \mathrm{Gal}(k^a/k)$, d.h. es gilt $f(\sigma x) = \sigma(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{D}^n_{k^a}$ und alle $\sigma \in \Gamma$.

Die Banachalgebra $T_n(k)$ erfüllt das *Maximum-Modulus-Prinzip*, d.h. es gilt für alle $f \in T_n(k)$

$$|f| \;=\; \max\{|f(x)| \; ; \; x \in \mathbb{D}^n_{k^a}\} \; .$$

2.2 Weierstraß-Rückert-Theorie für die Tate-Algebra

Der Körper k sei wie im letzten Abschnitt. Wir fixieren k und schreiben kurz T_n für $T_n(k)$. Es sei

$$g \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \zeta_n^\nu \;\in\; T_n \; ,$$

wobei $g_\nu \in T_{n-1} = k\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\rangle$. Die strikt konvergente Potenzreihe g heißt *Weierstraßdivisor in* ζ_n vom Grade $s \in \mathbb{N}_0$, falls

- g_s eine Einheit in T_{n-1} ist,
- $|g_s| = |g|$ und $|g_s| > |g_\nu|$ für alle $\nu > s$.

Im Falle $|g| = 1$ ist dies gleichbedeutend damit, daß das Bild von g in

$$T_n\tilde{}\; := \; (T_n)^\circ/(T_n)\check{}$$

ein normierbares Polynom vom Grade s in der Unbestimmten ζ_n ist. Dabei ist

$$\begin{aligned} (T_n)^\circ \;&:=\; \{f \in T_n \; ; \; |f| \le 1\} \; , \\ (T_n)\check{} \;&:=\; \{f \in T_n \; ; \; |f| < 1\} \; , \end{aligned}$$

und es gilt $T_n\tilde{} \cong \tilde{k}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ mit $\tilde{k} := k^\circ/k\check{}$.

Ist g Weierstraßdivisor in ζ_n vom Grade s, so kann man zu jedem $f \in T_n$ die Weierstraßdivision

$$f \;=\; qg + r$$

durchführen mit eindeutig bestimmten $q \in T_n$, $r \in T_{n-1}[\zeta_n]$ derart, daß $\mathrm{Grad}\, r < s$.

Ein normiertes Polynom $\omega \in T_{n-1}[\zeta_n]$ mit $|\omega| = 1$ heißt *Weierstraßpolynom* in ζ_n. Ein solches ω ist dann Weierstraßdivisor in ζ_n vom Grade s, wobei s der Grad von ω in ζ_n sei. Eine Folgerung der Weierstraßdivision ist der folgende Satz ([4], 5.2.2., Theorem 1).

Satz 2.2.1 (Weierstraßscher Vorbereitungssatz) *Es sei $g \in T_n$ ein Weierstraßdivisor in ζ_n vom Grade s. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Weierstraßpolynom $\omega \in T_{n-1}[\zeta_n]$ vom Grade s und eine eindeutig bestimmte Einheit $u \in T_n^\times$ derart, daß $g = u \cdot \omega$.*

Der *Weierstraßsche Endlichkeitssatz* sagt dann aus, daß $T_n/\omega T_n$ ein endlicher freier T_{n-1}-Modul ist für jedes Weierstraßpolynom $\omega \in T_n$.

Die Existenz genügend vieler Weierstraßdivisoren, nach einer eventuellen Variablentransformation, zeigt folgender Satz (siehe [4], 5.2.4, Prop. 1).

Satz 2.2.2 *Es sei $f \in T_n \setminus \{0\}$. Dann gibt es einen Automorphismus σ von T_n vom Typ*

$$\sigma(\zeta_n) \;=\; \zeta_n, \;\; \sigma(\zeta_i) \;=\; \zeta_i + \zeta_n^{c_i}, \; i = 1, \ldots, n-1$$

derart, daß $\sigma(f)$ Weierstraßdivisor in ζ_n ist. Insbesondere ist $\sigma(f)$ assoziiert zu einem Weierstraßpolynom.

Mit Hilfe dieser Theorie kann man zeigen, daß T_n ein noetherscher, faktorieller Jacobson-Ring ist, und daß alle Ideale in T_n (sogar strikt) abgeschlossen sind.

2.3 Affinoide k-Algebren

Es sei wieder ein vollständiger nicht-archimedisch bewerteter Körper k gegeben. Unter einer *affinoiden k-Algebra A* versteht man das homomorphe Bild einer Tate-Algebra T_n.

Ist $\alpha : T_n \twoheadrightarrow A$ ein Epimorphismus, so kann für $f \in A$ die *Restklassennorm*

$$|f|_\alpha \;:=\; \inf\{|g| \; ; \; g \in T_n, \; \alpha(g) = f\}$$

betrachtet werden. Dann ist A ebenfalls eine k-Banachalgebra und ein noetherscher Jacobson-Ring.

Zu jeder affinoiden k-Algebra A gibt es eine *Noether-Normalisierung*, d.h. es gibt ein $d \geq 0$ und einen endlichen Monomorphismus $T_d \hookrightarrow A$ (siehe [4], 6.1.2). Dabei ist d gerade die Krull-Dimension von A.

Die *Supremum-Seminorm* auf A ist für $f \in A$ definiert durch

$$|f|_{\sup} \;:=\; \sup\{|f(\mathfrak{m})| \; ; \; \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A\} \, .$$

Dabei ist $\operatorname{Max} A$ die Menge aller maximalen Ideale von A. Für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ ist $f(\mathfrak{m})$ definiert als das Bild von f in $A/\mathfrak{m}$. Nun ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von k, und die Bewertung von k kann eindeutig auf $A/\mathfrak{m}$ fortgesetzt werden. Für die Supremum-Seminorm gilt eine Version des *Maximum-Modulus-Theorems*, d.h. das Supremum in der Definition ist ein Maximum.

Die Supremum-Seminorm entscheidet darüber, ob ein Element beschränkte Potenzen hat oder ob es *topologisch nilpotent* ist bezüglich einer beliebigen Restklassennorm. Für $f \in A$ gilt nämlich, daß

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |f^n|_\alpha < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad |f|_{\sup} \le 1 \, ,$$
$$\lim_{n \to \infty} |f^n|_\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f|_{\sup} < 1 \, .$$

Es gilt stets $|f|_{\sup} \le |f|_\alpha$ für alle in Frage kommenden Epimorphismen $\alpha : T_n \twoheadrightarrow A$. Im Falle der Tate-Algebra $A = T_n$ ist die Supremum-Seminorm gleich der Gauß-Norm.

Die Supremum-Seminorm ist eine Norm genau dann, wenn A reduziert ist. In diesem Falle ist die Supremum-Seminorm äquivalent zu jeder vollständigen k-Algebra-Norm, insbesondere zu $|f|_\alpha$. Man spricht dann von einer *Banach-Funktionen-Algebra.*

Verallgemeinerte Bruchringe. Es seien A eine k-affinoide k-Algebra und $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in A$. Wir wollen konvergente Potenzreihen in den Elementen $f_1, \ldots, f_r, g_1^{-1}, \ldots, g_s^{-1}$ über A bilden. Dazu schreiben wir kurz $\mathrm{f} := (f_1, \ldots, f_r)$ und $\mathrm{g} := (g_1, \ldots, g_s)$. Dann gibt es eine „kleinste" affinoide k-Algebra über A, in der die Elemente von g Einheiten sind, und in der f und g^{-1} Supremum-Seminorm ≤ 1 haben. Genauer kann man mit Unbestimmten $\zeta := (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$ und $\eta := (\eta_1, \ldots, \eta_s)$

$$\varphi : A \;\to\; A\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}^{-1} \rangle \;:=\; A\langle \zeta, \eta \rangle / (\zeta - \mathrm{f}, \mathrm{g}\eta - 1)$$

definieren. Dann ist $A\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}^{-1} \rangle$ eine affinoide k-Algebra, die $\varphi(g_\nu)$ sind Einheiten, und die Elemente $\varphi(f_\mu)$ und $\varphi(g_\nu)$ haben Supremum-Seminorm ≤ 1. Ferner erfüllt $A\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}^{-1} \rangle$ eine universelle Eigenschaft über A bezüglich diesen Bedingungen.

Es seien nun $f_1, \ldots, f_r, g \in A$ gegeben, welche zusammen das 1-Ideal erzeugen. Wir wollen konvergente Potenzreihen in den Elementen $\frac{f_1}{g}, \ldots \frac{f_r}{g}$ über A bilden. Ähnlich wie oben betrachten wir den Homomorphismus

$$\psi : A \;\to\; A\left\langle \frac{\mathrm{f}}{g} \right\rangle \;:=\; A\langle \zeta \rangle / (g\zeta - \mathrm{f}) \, .$$

Dann ist $A\left\langle \frac{\mathrm{f}}{g} \right\rangle$ eine affinoide k-Algebra, $\psi(g)$ ist eine Einheit, und die Elemente $\psi(\frac{f_1}{g}), \ldots, \psi(\frac{f_r}{g})$ haben Supremum-Seminorm ≤ 1.

2.4 Affinoide Varietäten und Teilbereiche

Auf der Tate-Algebra $T_n = T_n(k)$ kann man die Menge der maximalen Ideale $\operatorname{Max} T_n$ mit den Punkten von $\mathbb{D}^n_{k^a}$ modulo der Operation der absoluten Galoisgruppe $\Gamma = \operatorname{Gal}(k^a/k)$ identifizieren. Genauer gibt es eine Surjektion

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{D}^n_{k^a} &\twoheadrightarrow \operatorname{Max} T_n \, , \\ x &\mapsto \mathfrak{m}_x := \{ f \in T_n \, ; \, f(x) = 0 \} \, , \end{aligned}$$

die eine Bijektion $\mathbb{D}^n_{k^a}/\Gamma \cong \operatorname{Max} T_n$ induziert. Das Auswerten einer Funktion $f \in T_n$ in einem Punkt x ist dann kompatibel mit diesem Isomorphismus. Für jedes $\mathfrak{m}_x \in \operatorname{Max} T_n$ kann man eine Einbettung $i_x : T_n/\mathfrak{m}_x \hookrightarrow k^a$ wählen. Auf diese Weise induziert f eine Abbildung $\operatorname{Max} T_n \to k^a$. Verkettet man diese mit der kanonischen Abbildung $k^a \to k^a/\Gamma$ in die Menge der Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe auf k^a, so ist die resultierende Abbildung $\operatorname{Max} T_n \to k^a/\Gamma$ unabhängig von der Wahl der Einbettungen i_x. Es gibt somit ein kommutatives Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^n_{k^a} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"] & k^a \arrow[d, dashed] \\
\operatorname{Max} T_n \arrow[r, "f"] & k^a/\Gamma
\end{tikzcd}$$

Daher macht es Sinn, die *affinoide Varietät* einer k-affinoiden k-Algebra A als das Paar

$$\operatorname{Sp} A \;:=\; (\operatorname{Max} A, A)$$

zu definieren und die Elemente von $\operatorname{Max} A$ als die Punkte von $\operatorname{Sp} A$ zu bezeichnen.

Für jede Teilmenge $F \subseteq A$ ist

$$V(F) \;:=\; \{x \in \operatorname{Sp} A |\, f(x) = 0,\ \forall f \in F\}$$

die *abgeschlossene Untervarietät* zur Menge F von X. Es gilt dann $V(F) = V(\mathfrak{a})$ für ein eindeutig bestimmtes reduziertes Ideal $\mathfrak{a}$ von A, und man kann $V(F)$ mit $\operatorname{Sp}(A/\mathfrak{a})$ identifizieren.

Ein *Morphismus* affinoider k-Varietäten $\operatorname{Sp} A \to \operatorname{Sp} B$ ist ein Paar (σ, σ^*), wobei $\sigma^* : B \to A$ ein k-Algebra-Homomorphismus ist, und die Abbildung $\sigma : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B$, $x \mapsto (\sigma^*)^{-1}(x)$ davon induziert wird. Der Morphismus $\operatorname{Sp} A \to \operatorname{Sp} B$ heißt *abgeschlossene Immersion*, falls $B \to A$ ein Epimorphismus ist. Man kann eine abgeschlossene Immersion $\operatorname{Sp} A \to \operatorname{Sp} B$ stets mit der Inklusion der abgeschlossenen Untervarietät $V(\ker(B \twoheadrightarrow A)) \hookrightarrow \operatorname{Sp} B$ identifizieren.

Eine Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Sp} A$ heißt *affinoider Teilbereich* von $\operatorname{Sp} A$, wenn es eine affinoide k-Varietät $\operatorname{Sp} A'$ und einen Morphismus $\varphi : \operatorname{Sp} A' \to \operatorname{Sp} A$ gibt derart, daß $\varphi(\operatorname{Sp} A') \subseteq U$ gilt, und φ die universelle Eigenschaft besitzt, daß jeder Morphismus $\psi : \operatorname{Sp} B \to \operatorname{Sp} A$ mit $\psi(\operatorname{Sp} B) \subseteq U$ eindeutig über φ faktorisiert. In diesem Fall bildet φ die Punkte von $\operatorname{Sp} A'$ bijektiv auf U ab. Man sagt, der affinoide Teilbereich werde von $\operatorname{Sp} A' \hookrightarrow \operatorname{Sp} A$ *repräsentiert* und schreibt suggestiv $U = \operatorname{Sp} A'$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Sp} B \arrow[d, dotted, "\exists!"] \arrow[dr, "\psi(\operatorname{Sp} B)\subseteq U"] & \\
\operatorname{Sp} A' \arrow[r, hook, "\varphi"] & \operatorname{Sp} A
\end{tikzcd}$$

Es seien $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s, g \in A$ gegeben und $\mathrm{f} := (f_1, \ldots, f_r)$, $\mathrm{g} := (g_1, \ldots, g_s)$. Dann kann man folgende affinoiden Teilbereiche von $X := \operatorname{Sp} A$ definieren.

$$\begin{array}{lll}
\textit{Weierstraßbereich} & : \operatorname{Sp} A\langle \mathrm{f} \rangle & = X(\mathrm{f}) \\
 & & := \{x \in X \; ; \; |f_i(x)| \leq 1, \; \forall i\} \\
\textit{Laurentbereich} & : \operatorname{Sp} A\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}^{-1} \rangle & = X(\mathrm{f}, \mathrm{g}^{-1}) \\
 & & := \{x \in X \; ; \; |f_i(x)| \leq 1 \leq |g_j(x)|, \; \forall i, j\} \\
\textit{Rationaler Bereich} & : \operatorname{Sp} A \left\langle \frac{\mathrm{f}}{g} \right\rangle & = X\left(\frac{\mathrm{f}}{g}\right) \\
 & & := \{x \in X \; ; \; |f_i(x)| \leq |g(x)|, \; \forall i\} \; .
\end{array}$$

Im Falle des rationalen Bereich sei dabei vorausgesetzt, daß $f_1, \ldots, f_r, g$ das 1-Ideal in A erzeugen.

Jeder affinoide Teilbereich ist eine endliche Vereinigung rationaler Bereiche.

Die Weierstraßbereiche in $\operatorname{Sp} A$ bilden die Basis der *kanonischen Topologie* auf $\operatorname{Sp} A$, welche feiner ist als die Zariski-Topologie. Bezüglich der kanonischen Topologie sind affinoide Teilbereiche stets offen, und Morphismen von affinoiden Varietäten sind stets stetig. Diese Topologie heißt kanonisch, da sie im Falle der Tate-Algebra T_n gerade die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung $\mathbb{D}^n_{k^a} \twoheadrightarrow \operatorname{Max} T_n$ ist.

Wählt man für jeden affinoiden Teilbereich $U \subseteq X = \operatorname{Sp} A$ eine Repräsentation $U = \operatorname{Sp} A' \hookrightarrow \operatorname{Sp} A$, so erhält man durch die Definition $\mathcal{O}_X(U) := A'$ eine Prägarbe $\mathcal{O}_X$ von affinoiden k-Algebren auf der Familie der affinoiden Teilbereichen. Die Keime $\mathcal{O}_{X,x}$ sind dann noethersche lokale Ringe mit maximalem Ideal $\{h \in \mathcal{O}_{X,x} \; ; \; h(x) = 0\}$, und es gilt $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \hat{A}$ bezüglich der x-adischen Topologie.

Ein Morphismus affinoider Varietäten $\varphi : X \to Y$ heißt *lokal abgeschlossene Immersion bei* x bzw. *offene Immersion bei* x , falls er injektiv in x ist, d.h. es gilt $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$, und falls die induzierte Abbildung auf den lokalen Ringen $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ surjektiv bzw. bijektiv ist.

Eine lokal abgeschlossene bzw. offene Immersion $\varphi : X \to Y$ bei x ist dasselbe wie eine abgeschlossene Immersion bzw. ein Isomorphismus $x \in \varphi^{-1} Y' \to Y'$ mit einem affinoiden Teilbereich $Y' \subseteq Y$.

Eine offene Immersion ist dasselbe wie die Inklusion eines affinoiden Teilbereiches.

Die Prägarbe $\mathcal{O}_X$ ist auf der Familie der affinoiden Teilbereichen *azyklisch* bezüglich endlicher Überdeckungen, d.h. sie hat die Eigenschaft einer Garbe, daß folgende Sequenz für alle endlichen Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X durch affinoiden Teilbereiche U_i exakt ist. (Tatescher Azyklizitätssatz)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathcal{O}_X(X) & \to & \prod\limits_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i) & \rightrightarrows & \prod\limits_{i,j \in I} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \\
 & & & & (f_i)_{i \in I} & \mapsto & (f_j - f_i)_{i,j \in I} \; .
\end{array}$$

2.5 Rigide Räume

Die affinoiden Teilbereiche einer affinoiden Varietät $X = \operatorname{Sp} A$ und die endlichen Überdeckungen, für die der Tatesche Azyklizitätssatz gilt, können als topologische Struktur von X verstanden werden. Genauer handelt es sich um eine *Grothendieck-Topologie* auf X, d.h. definiert man die *zulässigen* Mengen als die affinoiden Teilbereiche U von X, und definiert man die *zulässigen Überdeckungen* von U als die endlichen Überdeckungen durch affinoide Teilbereiche, so gilt

- U, V zulässig $\implies U \cap V$ zulässig.
- U zulässig $\implies \{U\}$ zulässige Überdeckung von U.
- $(V_{i,j})_j$ zulässige Überdeckung von U_i für alle i, $(U_i)_i$ zulässige Überdeckung von $U \implies (V_{i,j})_{i,j}$ zulässige Überdeckung von U.
- U, V zulässig, $(U_i)_i$ zulässige Überdeckung von U, $V \subseteq U \implies (V \cap U_i)_i$ zulässige Überdeckung vo V.

Die eben betrachtete Grothendieck-Topolgie auf X heiße die *schwache Grothendieck-Topologie* auf X. Der Tatesche Azyklizitätssatz besagt dann, daß $\mathcal{O}_X$ auf der schwachen Grothendieck-Topologie eine Garbe darstellt.

Wir betrachten nun folgende Eigenschaften von Grothendieck-Topologien auf einer Menge X, welche die Zulässigkeit lokal charakterisieren.

(G_0) $\emptyset$ und X sind zulässig.

(G_1) Ist U zulässig, $V \subseteq U$, und gibt es eine zulässige Überdeckung $(U_i)_i$ von U derart, daß $U_i \cap V$ zulässig ist für alle i, so ist V zulässig.

(G_2) Ist $(U_i)_i$ eine Überdeckung einer zulässigen Menge U durch zulässige Mengen U_i, und besitzt $(U_i)_i$ eine zulässige Verfeinerung, so ist $(U_i)_i$ eine zulässige Überdeckung.

Es gibt eine Verfeinerung der schwachen Grothendieck-Topologie auf X zur sogenannten *starken Grothendieck-Topologie* derart, daß die Eigenschaften G_0, G_1 und G_2 erfüllt sind. Bezüglich der starken Grothendieck-Topologie sind z.B. alle Mengen der Form

$$\{x \in X\ ;\ |f(x)| < 1\},\ \{x \in X\ ;\ |f(x)| > 1\},\ \{x \in X\ ;\ |f(x)| > 0\}$$

zulässig für $f \in A$, und endliche Vereinigungen solcher Mengen bilden zulässige Überdeckungen. Dasselbe gilt auch für Zariski-offene Teilmengen von X und natürlich für affinoide Teilbereiche. Ferner sind Morphismen zwischen affinoiden Varietäten stets stetig bezüglich der starken Grothendieck-Topologie, und die Urbilder zulässiger Überdeckungen sind wiederum zulässige Überdeckungen.

Zur Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X, welche zunächst auf der schwachen Grothendieck-Topologie definiert wurde, gibt es nun eine eindeutige assoziierte Garbe, die auf der starken Grothendieck-Topologie definiert ist. Wir wollen diese wieder mit $\mathcal{O}_X$ bezeichnen. Auf diese Weise haben wir zu jeder affinoiden k-Varietät $\operatorname{Sp} A$ einen lokal Grothendieck-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ konstruiert.

Ist speziell $A = T_n(k)$ die Tate-Algebra in n Unbestimmten über k und $X := \operatorname{Sp} T_n(k)$, so heißt

$$\mathbb{D}_k^n \;:=\; (X, \mathcal{O}_X)$$

der *n-dimensionale Einheitsball* über k. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, denn die Punkte von X lassen sich mit den Punkten in $\mathbb{D}_{k^a}^n$ modulo der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(k^a/k)$ identifizieren.

Der so konstruierte Funktor

$$\{\text{Affinoide } k\text{-Varietäten}\} \;\to\; \{\text{lokal Grothendieck-geringte Räume über } k\}$$

ist voll-treu. Unter diesem Funktor entspricht eine offene Immersionen $X \to Y$ von affinoiden k-Varietäten einem Isomorphismus von $(X, \mathcal{O}_X)$ nach $(U, \mathcal{O}_Y|_U)$ für einen affinoiden Teilbereich U von Y.

Definition 2.5.1 *Ein* ***rigider Raum*** *über k ist ein lokal Grothendieck-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ über k derart, daß die Grothendieck-Topologie auf X die Eigenschaften G_0, G_1 und G_2 erfüllt, und daß X eine zulässige Überdeckung $(X_i)_i$ durch affinoide k-Varietäten X_i besitzt.*

In der Kategorie der rigiden k-Räume existiert ein Faserprodukt $X \times_S Y$ für Morphismen $X \to S$ und $Y \to S$ von rigiden k-Räumen. Im affinoiden Falle $X = \operatorname{Sp} A$, $Y = \operatorname{Sp} B$ und $S = \operatorname{Sp} R$ gilt

$$\operatorname{Sp} A \times_{\operatorname{Sp} R} \operatorname{Sp} B \;=\; \operatorname{Sp}(A \hat{\otimes}_R B)\;,$$

wobei $A \hat{\otimes}_R B$ das vervollständigte Tensorprodukt der normierten k-Algebren A und B über R sei.

Ist S ein rigider k-Raum, so definieren wir den *N-dimensionalen Ball über S* durch

$$\mathbb{D}_S^N \;:=\; \mathbb{D}_k^N \times_k S\;.$$

Im affinoiden Falle $S = \operatorname{Sp} R$ gilt

$$\mathbb{D}_{\operatorname{Sp} R}^N \;=\; \operatorname{Sp} R\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_N \rangle\;.$$

Allgemeiner werden wir den *N-dimensionalen Polyzylinder über S mit Radien* $\mathrm{c} = (c_1, \ldots, c_N)$, $c_i \in (k^a)^\times$, durch

$$\mathbb{D}_S^N(\mathrm{c}) \;:=\; \mathbb{D}_k^N(\mathrm{c}) \times_k S$$

definieren, wobei

$$\mathbb{D}_k^N(\mathrm{c}) \;:=\; \operatorname{Sp} k\langle c_1^{-1}\zeta_1, \ldots, c_N^{-1}\zeta_N \rangle\;.$$

Im Falle $|c_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, N$ und Koordinaten $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ von $\mathbb{D}_S^N$ über S gilt

$$\mathbb{D}_S^N(\mathrm{c}) \;=\; \{x \in \mathbb{D}_S^N \mid |\zeta_i(x)| \leq c_i,\; i = 1, \ldots, N\}\;.$$

Dies ist ein abgeschlossener Teilbereich und ein Weierstraßbereich in $\mathbb{D}_S^N$.

Der GAGA-Funktor (Géometrie Algébrique et Géometrie Analytique) Es gibt einen Funktor

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Schemata lokal vom endlichen Typ über } K\} & \to & \{\text{rigide } k\text{-Räume}\} \\ (Z, \mathcal{O}_Z) & \rightsquigarrow & (Z^{\text{an}}, \mathcal{O}_{Z^{\text{an}}}) \end{array}$$

und jeweils einen Morphismus lokal Grothendieck-geringter k-Räume $(Z^{\text{an}}, \mathcal{O}_{Z^{\text{an}}}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ derart, daß für jeden rigiden k-Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ jeder Morphismus von lokal Grothedieck-geringten k-Räumen $Y \to Z$ eindeutig über $Z^{\text{an}} \to Z$ faktorisiert.

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, dotted, "\exists!"] \arrow[dr] & (Z^{\text{an}}, \mathcal{O}_{Z^{\text{an}}}) \arrow[d] \\ & (Z, \mathcal{O}_Z) \end{tikzcd}$$

Der rigide Raum Z^{an} ist als eine analytische Version des algebraischen Schemas Z zu verstehen. Wir wollen in drei Fällen diese Analytifizierung beschreiben.

- *Der rigide Raum* $(\mathbb{A}_k^n)^{\text{an}}$. Es sei $Z = \mathbb{A}_k^n$ der affine n-dimensionale Raum, aufgefaßt als algebraisches Schema. Es sei $c \in k$ mit $|c| > 1$. Man definiere

  $$T_n^{(i)} := k\langle c^{-1}\zeta\rangle = \{f \in k[\![\zeta]\!]\ ;\ f \text{ konvergiert auf } \mathbb{D}_{k^a}^n(|c|^i)\}\ .$$

  Dann gibt es Inklusionen

  $$\begin{array}{ccccccccc} T_n & = & T_n^{(0)} & \hookleftarrow & T_n^{(1)} & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & k[\zeta] \\ \mathbb{D}_k^n & = & \operatorname{Sp} T_n & \hookrightarrow & \operatorname{Sp} T_n^{(1)} & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \operatorname{Max} k[\zeta]\ . \end{array}$$

  Es gilt $\operatorname{Max} k[\zeta] = \bigcup_{i=0}^{\infty} \operatorname{Max} T_n^{(i)}$. Also kann man die rigiden k-Räumme $\operatorname{Sp} T_n^{(i)}$ zusammenkleben und erhält so den rigiden k-Raum

  $$(\mathbb{A}_k^n)^{\text{an}} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \operatorname{Sp} T_n^{(i)}\ ,$$

  der punktweise mit $\operatorname{Max} k[\zeta]$ übereinstimmt. Wir werden in Zukunft die Bezeichnung $\mathbb{A}_k^n$ für den affinen n- dimensionalen rigiden Raum $(\mathbb{A}_k^n)^{\text{an}}$ verwenden.

- *Der allgemeine Fall.* Es sei $Z = \operatorname{Spec} B$ ein Schema, welches vom endlichen Typ über k sei, d.h. wir können annehmen, daß $B = k[\zeta]/\mathfrak{a}$ für ein System von Unbestimmten $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ und ein Ideal $\mathfrak{a} \leq k[\zeta]$ ist. Dann gibt es Inklusionen

  $$\begin{array}{ccccccccc} T_n^{(0)}/(\mathfrak{a}) & \hookleftarrow & T_n^{(1)}/(\mathfrak{a}) & \hookleftarrow & \dots & \hookleftarrow & k[\zeta]/\mathfrak{a} & = & B \\ \operatorname{Sp} T_n^{(0)}/(\mathfrak{a}) & \hookrightarrow & \operatorname{Sp} T_n^{(1)}/(\mathfrak{a}) & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \operatorname{Max} B\ . & & \end{array}$$

Es gilt $\operatorname{Max} B = \bigcup_{i=0}^{\infty} \operatorname{Max} T_n^{(i)}/(\mathfrak{a})$. Also kann man die rigiden k-Räume $\operatorname{Sp} T_n^{(i)}/(\mathfrak{a})$ zusammenkleben, und erhält den rigiden k-Raum

$$Z^{\mathrm{an}} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \operatorname{Sp} T_n^{(i)}/(\mathfrak{a}) ,$$

der punktweise mit $\operatorname{Max} B$ übereinstimmt. Bei dieser Konstruktion entsprechen die offenen Unterschemata von $Z = \operatorname{Spec} B$ genau den offenen Untervarietäten von Z^{an}. Durch Zusammenkleben lokaler Daten kann man diese Konstruktion auf Schemata erweiteren, die lokal vom endlichen Typ sind.

- *Der rigide Raum* $(\mathbb{P}_k^n)^{\mathrm{an}}$. Der projektive n-dimensionale rigide Raum $(\mathbb{P}_k^n)^{\mathrm{an}}$ kann wie im algebraischen Fall durch Zusammenkleben von $n+1$ Kopien von $(\mathbb{A}_k^n)^{\mathrm{an}}$ verstanden werden. Da aber jeder Punkt von $(\mathbb{P}_k^n)_{\mathrm{an}}$ mit homogenen Koordinaten vom Betrag ≤ 1 dargestellt werden kann, kann man auch $n+1$ Kopien des Einheitsballs $\mathbb{D}_k^n$ zusammenkleben. Man schreibt dazu

$$\mathbb{D}_k^n \cong X_i = \operatorname{Sp} k \left\langle \frac{\zeta_0}{\zeta_i}, \dots, \frac{\zeta_n}{\zeta_i} \right\rangle$$

für $i = 0, \dots, n$, wobei $\frac{\zeta_0}{\zeta_i}, \dots, \frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_i}, \frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i}, \dots, \frac{\zeta_n}{\zeta_i}$ als Unbestimmte aufgefaßt werden. Dann definiert man die affinoiden Teilbereiche

$$X_{ij} := X_i \left(\left(\frac{\zeta_j}{\zeta_i} \right)^{-1} \right) \subseteq X_i$$

und Isomorphismen $\varphi_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ durch

$$\varphi_{ij}^* : \frac{\zeta_\nu}{\zeta_j} \mapsto \left(\frac{\zeta_j}{\zeta_i} \right)^{-1} \frac{\zeta_\nu}{\zeta_i} , \ \nu = 0, \dots, n .$$

Dann kann man die rigiden Räume X_i mit entlang der Isomorphismen $X_{ij} \cong X_{ji}$ zusammenkleben und erhält so den projektiven n-dimensionalen rigiden Raum $(\mathbb{P}_k^n)^{\mathrm{an}}$, den wir in Zukunft kurz mit $\mathbb{P}_k^n$ bezeichnen werden.

2.6 Eigentliche Morphismen und relative Kompaktheit

Ein Morphismus $X \to Y$ rigider Räume heißt *separiert*, falls die zugehörige Diagonalabbildung

$$\Delta : X \to X \times_Y X$$

eine abgeschlossene Immersion ist. Beispiele separierter Morphismen sind

- abgeschlossene Immersionen,

- offene Immersionen,
- endliche Morphismen,
- Morphismen zwischen affinoiden Varietäten,
- $\mathbb{A}_k^n \to \operatorname{Sp} k$,
- $\mathbb{P}_k^n \to \operatorname{Sp} k$,
- $X^{\mathrm{an}} \to \operatorname{Sp} k$, wobei X ein algebraisches Schema über k ist.

Wie im algebraischen Fall ist „separiert“ eine lokale Eigenschaft, die stabil unter Komposition, Basiswechsel und Faserprodukten ist.

Definition 2.6.1 *Es sei ein Morphismus $X \to Y$ affinoider Varietäten $X = \operatorname{Sp} A$ und $Y = \operatorname{Sp} B$ gegeben, und $U \subseteq X$ sei ein affinoider Teilbereich. Dann heißt U **relativ Y-kompakt** in X , in Zeichen*

$$U \Subset_Y X ,$$

wenn es eine affinoides Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_r$ von A über B gibt (d.h. die Abbildung $B\langle f_1, \ldots, f_r\rangle \to A$ ist ein Epimorphismus), derart daß

$$U \subseteq X(\varepsilon^{-1}\mathrm{f}) = \{x \in X \,;\, |f_i(x)| \le \varepsilon,\ i = 1, \ldots, r\}$$

für ein $\varepsilon \in (k^a)^\times$ mit $|\varepsilon| < 1$.

Dies ist äquivalent zur Existenz einer abgeschlossenen Immersion $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{D}_Y^r$ derart, daß $\varphi(U) \subseteq \mathbb{D}_Y^r(\varepsilon)$ gilt für ein $|\varepsilon| < 1$, d.h. es gilt $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ mit $\varepsilon_i \in (k^a)^\times$ und $|\varepsilon_i| < 1$. Das folgende Diagramm soll diesen Sachverhalt darstellen.

$$U \Subset_Y X \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook] & \mathbb{D}_Y^r(\varepsilon) \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, hook, dashed, "\text{abg.}"'] & \mathbb{D}_Y^r \end{tikzcd}$$

Die Eigenschaft „relativ kompakt“ ist stabil unter Basiswechsel und Bildung von Faserprodukten.

Lemma 2.6.2 *Es sei unter Beibehaltung obiger Bezeichnungen $U \Subset_Y X$, und $V \subseteq X$ sei eine abgeschlossene Untervarietät. Dann gilt $U \cap V \Subset_Y V$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine abgeschlossene Immersion $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{D}_Y^r(\varepsilon)$ mit $|\varepsilon| < 1$. Die Inklusion $\psi : V \hookrightarrow X$ liefert eine abgeschlossene Immersion

$$\varphi \circ \psi : V \hookrightarrow \mathbb{D}_Y^r(\varepsilon) ,$$

und die Behauptung folgt aus

$$(\varphi \circ \psi)(U \cap V) \subseteq \varphi(U) \subseteq \mathbb{D}_Y^r(\varepsilon) .$$

Definition 2.6.3 *Ein Morphismus $\rho : X \to Y$ rigider Räume heißt* ***eigentlich****, wenn er separiert ist, und wenn es eine zulässige affinoide Überdeckungen $Y = \bigcup_i Y_i$ und $\rho^{-1}(Y_i) = \bigcup_j X'_{ij} = \bigcup_j X_{ij}$ gibt derart, daß für alle i, j gilt*

$$X_{ij} \Subset_{Y_i} X'_{ij} \ .$$

Wie im algebraischen Fall sind abgeschlossene Immersionen und endliche Morphismen eigentlich, und „eigentlich" ist eine lokale Eigenschaft, die stabil unter Basiswechsel und Faserprodukten ist. In analoger Weise gelten auch folgende Zusammenhänge im Falle eines kommutativen Diagramms von Morphismen rigider Räume.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & Z \end{tikzcd}$$

- Ist $X \to Z$ separiert, so ist auch $X \to Y$ separiert.
- Sind $X \to Z$ eigentlich und $Y \to Z$ separiert, so ist $X \to Y$ eigentlich.
- Sind $X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion und $Y \to Z$ eigentlich, so ist $X \to Z$ eigentlich.

Der folgende Satz gibt liefert eine vollständige geometrische Charakterisierung eigentlicher Morphismen.

Satz 2.6.4 (Stein-Faktorisierung) *Es sei $\varrho : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus rigider k-Räume. Dann gibt es einen rigiden k-Raum Z und eine Faktorisierung von ϱ der Form*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "\tau"] & \\ X \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\varrho"] & & Y \end{tikzcd}$$

wobei $\sigma : X \to Z$ surjektiv und eigentlich ist mit zusammenhängenden Fasern und $\sigma^* : \mathcal{O}_Z \to \sigma_* \mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus ist, und wobei $\tau : Z \to Y$ endlich ist.

Beweis: siehe [BGR], Proposition 9.6.5.

Recht aufwendig zu beweisen ist die Tatsache, daß die Komposition eigentlicher Morphismen wieder eigentlich ist. Dies wurde zunächst im Falle einer diskreten Bewertung von W. Lütkebohmert gezeigt ([16], 3.2). Der allgemeine Fall wurde dann von M. Temkin gezeigt ([20], 4.4). Beide Beweise führen die Eigentlichkeit im rigiden Fall auf die Eigentlichkeit bei formellen Modellen zurück, bei denen abstrakte Eigenschaften leichter zu zeigen sind, aber die geometrische Beschreibung fehlt. Dieser Zusammenhang sowie eine formelle Charakterisierung der relativen Kompaktheit werden im nächsten Kapitel erklärt.

Kapitel 3

Formelle Geometrie

3.1 Zulässige Algebren

Es sei R ein kommutativer Ring, der eine der folgenden Eigenschaften erfüllt.

- (R)*Klassischer rigider Fall :* R ist ein eindimensionaler vollständiger separierter $\mathfrak{I}$-adischer Bewertungsring, wobei $\mathfrak{I} = (\pi)$ für eine Nichteinheit $\pi \neq 0$ von R ist.

- (N)*Noetherscher Fall:* R ist ein noetherscher vollständiger und separierter $\mathfrak{I}$-adischer Ring.

Eine R-Algebra A heißt *topologisch vom endlichen Typ* über R, wenn es ein endliches System von Unbestimmten η über R und einen Epimorphismus $\varphi : R\langle\eta\rangle \twoheadrightarrow A$ gibt. Die R-Algebra A heißt *topologisch von endlicher Präsentation* über A, wenn zusätzlich der Kern von φ ein endlich erzeugtes Ideal von $R\langle\eta\rangle$ ist. Die R-Algebra A heißt *zulässig*, falls sie topologisch von endlicher Präsentation ist und zusätzlich keine $\mathfrak{I}$-Torsion hat.

In beiden Fällen (R) wie auch (N) ist eine R-Algebra, welche topologisch vom endlichen Typ ist und keine $\mathfrak{I}$-Torsion hat, bereits zulässig. Im Fall (R) ist die Abwesenheit von $\mathfrak{I}$-Torsion darüberhinaus äquivalent zur Flachheit von A über R.

Ist A topologisch vom endlichen Typ über R, so ist A wiederum vollständig und separiert bezüglich der $\mathfrak{I}$-adischen Topologie, und im Falle (N) ist A wiederum noethersch.

Ist A topologisch von endlicher Präsentation über R, so ist A und jeder endlich präsentierte A-Modul M *kohärent*, d.h. jeder endlich erzeugte A-Untermodul von M ist endlich präsentiert.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$R_\lambda \ := \ R/\mathfrak{I}^{\lambda+1} \ .$$

Dann gilt aufgrund der Vollständigkeit $R = \varprojlim_\lambda R_\lambda$. Ist A eine vollständige $\mathfrak{I}$-adische R-Algebra, so gilt

$$A \ = \ \varprojlim_\lambda A \otimes_R R_\lambda \ .$$

Insbesondere gilt dies also im Falle A topologisch vom endlichen Typ über R.

Mit den Algebren $A_\lambda := A \otimes R_\lambda$ lassen sich die obigen topologischen Eigenschaften algebraisch charakterisieren. Es gilt

$$\begin{array}{ll} & A \text{ ist topologisch vom endlichen Typ über } R \\ \Longleftrightarrow & A_\lambda \text{ ist vom endlichen Typ über } R_\lambda \text{ für alle } \lambda \\ \Longleftrightarrow & A_0 \text{ ist vom endlichen Typ über } R_0. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} & A \text{ ist topologisch von endlicher Präsentation über } R \\ \Longleftrightarrow & A_\lambda \text{ ist von endlicher Präsentation über } R_\lambda \text{ für alle } \lambda. \end{array}$$

Für die Flachheit gilt ein ähnliches Kriterium. Es sei $A \to B$ ein Morphismus von R-Algebren, wobei A topologisch von endlicher Präsentation und B topologisch von endlichem Typ und separiert sei. Ein kohärenter B-Modul M ist genau dann flach (bzw. treuflach) über A, wenn $M_\lambda := M \otimes_R R_\lambda$ flach (bzw. treuflach) über A_λ für alle λ ist.

3.2 Konstruktion formeller Schemata

Es sei A ein $\mathfrak{a}$-adischer vollständiger separierter Ring, wobei $\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugtes Ideal von A sei. Dann setzten wir

$$\operatorname{Spf} A \;:=\; \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \;;\; \mathfrak{p} \text{ offen in } A\}\;.$$

Ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ist offen in A genau dann, wenn es $\mathfrak{a}$ enthält. Topologisch gilt also $\operatorname{Spf} A \cong \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$. Wie im Falle algebraischer Schemata setzt man für $f \in A$

$$D(f) \;:=\; \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spf} A \;;\; f(\mathfrak{p}) \neq 0\}\;.$$

Auf dem System aller Mengen $D(f)$ kann man eine Prägarbe $\mathcal{O}$ definieren durch

$$\mathcal{O}:\; D(f) \mapsto A\langle f^{-1}\rangle \;=\; \varprojlim_n (A/\mathfrak{a}^n)[f^{-1}] \;\cong\; A\langle\zeta\rangle/(1-\zeta f)\;.$$

Wir bemerken, daß $A\langle f^{-1}\rangle$ wiederum ein vollständiger separierter Ring ist bezüglich der $\mathfrak{a}A\langle f^{-1}\rangle$-adischen Topologie, denn $\mathfrak{a}$ war als endlich erzeugt vorausgesetzt worden. Für $x = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spf} A$ ist der Halm

$$\mathcal{O}_x \;=\; \varinjlim_{x \in D(f)} A\langle f^{-1}\rangle$$

ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal von x erzeugt wird. Die Prägarbe $\mathcal{O}$ ist in der Tat eine Garbe und kann zu einer Garbe auf dem System aller Zariski-offenen Teilmengen von $\operatorname{Spf} A$ fortgesetzt werden. Der so erhaltene lokal-topologisch-geringte Raum

$$(\operatorname{Spf} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A})$$

heißt das *affine formelle Schema* von A.

Morphismen zwischen affinen formellen Schemata sind stets als Morphismen lokal topologisch-geringter Räume zu verstehen, d.h. die enthaltenen Ringhomomorphismen sind als stetig vorausgesetzt. Dann entsprechen die Morphismen $\operatorname{Spf} A \to \operatorname{Spf} B$ genau den stetigen Morphismen $B \to A$.

In der Kategorie der affinen formellen Schemata existieren Faserprodukte. Sind $R \to A$ und $R \to B$ Momorphismen von adischen Ringen, so gilt

$$\operatorname{Spf} A \times_{\operatorname{Spf} R} \operatorname{Spf} B \;=\; \operatorname{Spf} A \hat{\otimes}_R B \;,$$

wobei $A \hat{\otimes}_R B$ das vollständige Tensorprodukt von A und B über R sei.

Es sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein algebraisches Schema und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, das durch ein quasi-kohärentes Ideal $\mathscr{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ definiert sei. Man definiere die Garbe $\mathcal{O}_Y$ durch Einschränkung des projektiven Limes $\varprojlim_n \mathcal{O}_X / \mathscr{J}^n$ auf Y. Dann ist der lokal-topologisch-geringte Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ die *formelle Vervollständigung* von X entlang Y. Diese Konstruktion sieht lokal wie folgt aus. Man nehme $X = \operatorname{Spec} A$ an und $\mathscr{J}$ sei assoziiert zum Ideal $\mathfrak{a} \leq A$. Dann ist die formelle Vervollständigung von X entlang $Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ gegeben durch

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \;=\; \operatorname{Spf} \hat{A} \;,$$

wobei $\hat{A}$ die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung von A sei.

Es sei nun R ein gegebener $\mathfrak{I}$-adischer Ring, der den klassischen rigiden Fall (R) oder den Noetherschen Fall (N) erfülle. Ein *formelles R-Schema X* ist definiert als ein lokal topologisch-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ derart, daß es eine Überdeckung von X durch offene Mengen $(U_i)_i$ gibt, wobei jedes $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ isomorph zu einem affinen formellen Schema $\operatorname{Spf} A_i$ mit einer R-Algebra A_i ist. Falls zusätzlich alle A_i topologisch vom endlichen Typ (bzw. topologisch von endlicher Präsentation bzw. zulässig) sind, so heißt X *lokal topologisch vom endlichen Typ* (bzw. *lokal topologisch von endlicher Präsentation* bzw. *zulässig*). Ist X quasikompakt und lokal topologisch vom endlichen Typ (bzw. lokal topologisch von endlicher Präsentation und quasi-separiert), so heißt X *topologisch vom endlichen Typ* (bzw. *topologisch von endlicher Präsentation*).

Ist das formelle R-Schema X topologisch vom endlichen Typ, so sind die obigen R-Algebren A_i ebenfalls $\mathfrak{I}$-adische Ringe, d.h. die Topologie auf A_i ist durch $\mathfrak{I}A_i$ definiert. Im klassischen rigiden Fall (R) sind die A_i also π-adische Ringe.

Zu einem zulässigen formellen R-Schema X kann man die zugehörigen R_λ-Schemata auf dem Level λ definieren durch

$$X_\lambda \;:=\; X \otimes_R R_\lambda \;,$$

indem man $X = \bigcup_i \operatorname{Spf} A_i$ mit zulässigen R-Algebren A_i schreibt und dann

$$X_\lambda \;:=\; \bigcup_i \operatorname{Spec}(A_i \otimes_R R_\lambda)$$

entlang der lokalen Daten aus der Überdeckung von X zusammenklebt. Es gilt dann

$$X \;=\; \varinjlim_{\lambda} X_\lambda \;.$$

Der rig-Funktor. Wir betrachten den klassischen rigiden Fall, d.h. R sei vollständiger separierter eindimensionaler Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Wir wollen einen Funktor von der Kategorie der formellen R-Schemata in die Kategorie der rigiden K-Räume konstruieren. Ist $X = \operatorname{Spf} A$ eine affines formelles R-Schema, das lokal topologisch vom endlichen Typ vorausgesetzt sei, so definieren wir den Funktor rig durch

$$\mathrm{rig} : X = \operatorname{Spf} A \;\rightsquigarrow\; X_{\mathrm{rig}} := \operatorname{Sp}(A \otimes_R K) \;.$$

Bei $A \otimes_R K$ handelt es sich um eine affinoide K-Algebra. Ist

$$\varphi : \operatorname{Spf} A \to \operatorname{Spf} B$$

ein Morphismus affiner formeller R-Schemata, welche lokal topologisch vom endlichen Typ sind, so induziert der zugehörige Morphismus $\varphi^* : B \to A$ von R-Algebren einen Morphismus $\varphi^*_{\mathrm{rig}} : B \otimes_R K \to A \otimes_R K$, der wiederum einen Morphismus

$$\varphi_{\mathrm{rig}} : (\operatorname{Spf} A)_{\mathrm{rig}} = \operatorname{Sp} A \otimes_R K \;\to\; (\operatorname{Spf} B)_{\mathrm{rig}} = \operatorname{Sp} B \otimes_R K$$

definiert. Unter diesem Funktor korrespondiert eine offene Menge

$$X(D(f)) \;=\; \operatorname{Spf} A\langle f^{-1}\rangle$$

von $X = \operatorname{Spf} A$ zum Laurentbereich

$$X_{\mathrm{rig}}(f^{-1}) \;=\; \operatorname{Sp}(A \otimes_R K)\langle f^{-1}\rangle \;.$$

Also bildet der Fuktor rig offene Immersionen affiner formeller Schemata auf offene Immersionen affinoider Räume ab. Durch Zusammenkleben lokaler Daten erhält man so den gewünschten Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{rig} : \{R\text{-Algebren top. veT über } R\} \;&\to\; \{\text{rigide } K\text{-Räume}\} \\ X \;&\rightsquigarrow\; X_{\mathrm{rig}} \;. \end{aligned}$$

3.3 Zulässige formelle Aufblasungen

Es sei X ein zulässiges formelles R-Schema mit definierendem Ideal $\mathscr{J} = \mathfrak{I}\mathcal{O}_X$, und es sei $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{O}_X$ ein offenes kohärentes Ideal. Dann heißt das formelle R-Schema

$$X' \;:=\; \varinjlim_{\lambda} \operatorname{Proj} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{A}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{O}_X / \mathscr{J}^{\lambda+1}\right)$$

die *formelle Aufblasung von* $\mathscr{A}$ *in* X. Lokal sieht diese Konstruktion wie folgt aus. Nimmt man $X = \operatorname{Spf} A$ an, so korrespondiert $\mathscr{J}$ zum Ideal $\mathfrak{I}A$ und $\mathscr{A}$

zu einem offenen kohärenten Ideal $\mathfrak{a} \leq A$. Dann ist die formelle Aufblasung von X in $\mathscr{A}$ genau die $\mathfrak{I}$-adische Vervollständigung der schementheoretischen Aufblasung von $\operatorname{Spec} A$ in $\mathfrak{a}$.

Im affinen Fall $X = \operatorname{Spf} A$ kann man die formelle Aufblasung X' von X in $\mathscr{A}$ explizit beschreiben. Es sei etwa $\mathfrak{a}$ von $f_0, \ldots, f_r$ erzeugt. Da $\mathfrak{a} = (f_0, \ldots, f_r)$ offen ist, enthält es eine Potenz des definierenden Ideals $\mathfrak{I}A$. Somit gilt

$$(f_0, \ldots, f_r) \otimes_R K \;=\; A \otimes_R K \;,$$

d.h. wir haben $(f_0, \ldots, f_r) \otimes \mathcal{O}_{X_{\text{rig}}} = \mathcal{O}_{X_{\text{rig}}}$ auf dem zugehörigen rigiden K-Raum $X_{\text{rig}} = \operatorname{Sp}(A \otimes_R K)$. Man setze

$$C_i \;:=\; A\left\langle \frac{f_j}{f_i} \;;\; j \neq i \right\rangle$$

und $A_i := C_i / (\mathfrak{I} - \text{Torsion})$. Hier stimmt die $\mathfrak{I}$-Torsion von C_i mit der f_i-Torsion überein. Dann ist $U_i := \operatorname{Spf} A_i$ der Ort von X', wo $\mathscr{A}\mathcal{O}_{X'}$ von f_i erzeugt wird, und die U_i bilden eine offenen affine Überdeckung von X'.

Jede formelle Aufblasung wie oben heißt eine *zulässige formelle Aufblasung* von X.

Der kanonische Morphismus $X' \to X$ ist universell bezüglich der Tatsache, daß $\mathscr{A}\mathcal{O}_{X'}$ invertierbar ist.

Wr geben noch einige Eigenschaften zulässiger formeller Aufblasungen.

- Ist Y das durch $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{O}_X$ definierte abgeschlossene Unterschema von X, und ist $U \subseteq X$ ein formelles offenes Unterschema mit $Y \cap U = \emptyset$, so induziert der kanonische Morphismus $\varphi : X' \to X$ einen Isomorphismus $\varphi^{-1}(U) \cong U$.
- Zulässige formelle Aufblasungen sind in der Kategorie der zulässigen formellen R-Schemata verträglich mit flachem Basiswechsel.
- Sie sind in naheliegendem Sinne transitiv.

Die formellen Aufblasungen erlauben es, den Funktor rig genauer zu beschreiben, siehe ([19]).

Satz 3.3.1 (Raynaud) *Im klassischen rigiden Fall (*R*) induziert der Funktor*

$$\text{rig} : X \rightsquigarrow X_{\text{rig}}$$

eine Äquivalenz von Kategorien zwischen

(i) der Kategorie der quasi-kompakten zulässigen formellen R-Schemata lokalisiert nach den zulässigen formellen Aufblasungen, und

(ii) der Kategorie der quasi-kompakten quasi-separierten rigiden K-Räume.

Ist Y ein rigider K-Raum, so heißt ein formelles R-Schema X ein *formelles Modell* von Y, wenn $X_{\text{rig}} \cong Y$ gilt. Nach obigem Satz besitzt zumindest jeder quasi-kompakte quasi-separierte rigide K-Raum ein formelles Modell. Ist z.B. Z ein algebraisches Schema, welches über K separiert und vom endlichen Typ ist, so erfüllt der zugehörige rigide K-Raum Z^{an} diese Voraussetzungen und besitzt daher ein formelles Modell.

3.4 Rig-Punkte

Definition 3.4.1 *Es sei X ein zulässiges formelles R-Schema. Ein* ***rig-Punkt*** *(bzw.* ***abgeschlossener rig-Punkt****) von X ist ein Morphismus von zulässigen formellen R-Schemata $u : T \to X$ mit den folgenden Eigenschaften.*

(i) u ist eine lokal abgeschlossene (bzw. abgeschlossene) Immersion.

(ii) T ist affin, etwa $T = \operatorname{Spf} B$, wobei B ein lokaler Integritätsbereich der Dimension 1 ist. Der Quotientenkörper von B heißt dann der ***Restklassenkörper*** *von u.*

Im klassischen rigiden Fall sind rig-Punkte stets abgeschlossen.

Ist $\varphi : X' \to X$ ein Morphismus zulässiger formeller R-Schemata und $u' : T \to X'$ ein rig-Punkt von X', so faktorisiert der Morphismus $\varphi \circ u' : T' \to X$ eindeutig über einen rig-Punkt $u : T \to X$.

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, dotted] \arrow[d, "u'"'] & T \arrow[d, dotted, "u"] \\ X' \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd}$$

Auf diese Weise induziert der Morphismus $\varphi : X' \to X$ also eine kanonische Abbildung

$$\text{rig-}\varphi : \{\text{rig-Punkte von } X'\} \to \{\text{rig-Punkte von } X\}\,, \quad u' \mapsto u\,.$$

Ist $\varphi : X' \to X$ eine zulässige formelle Aufblasung, so ist die zugehörige Abbildung rig-φ bijektiv und erhält die Restklassenkörper.

Lemma 3.4.2 *Es sei $X = \operatorname{Spf} A$ ein zulässiges affines formelles S-Schema, wobei $S = \operatorname{Spf} R$ ebenfalls affin sei. Dann gibt es bijektive Korrespondenzen zwischen den Punkten folgenden Typs.*

(a) abgeschlossene rig-Punkte von X (modulo natürliche Isomorphismen)

(b) nicht-offene Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\dim A/\mathfrak{p} = 1$

(c) abgeschlossene Punkte des Komplements der speziellen Faser des gewöhnlichen Schemas $\operatorname{Spec} A$ (d.h. maximale Ideale von $A \otimes_R K$)

Beweisskizze:

- Ist $u : \operatorname{Spf} B \to \operatorname{Spf} A$ ein rig-Punkt, so ist $\mathfrak{p} = \operatorname{Kern} u^*$ ein Punkt vom Typ (b).
- Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt vom Typ (b), so ist $\mathfrak{p} \otimes_R K$ ein Punkt vom Typ (c).
- Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $A \otimes_R K$, so setze man $\mathfrak{p} := \mathfrak{m} \cap A$. Dann ist der kanonische Morphismus $\operatorname{Spf} A/\mathfrak{p} \to \operatorname{Spf} A$ ein Punkt vom Typ (a).

Im klassischen rigiden Fall erhalten wir daher eine kanonische Bijektion

$$\{\text{rig-Punkte von } X\} \xrightarrow{\cong} X_{\mathrm{rig}}$$

zwischen den rig-Punkten von X und den Punkten des korrespondierenden rigiden K-Raums X_{rig}. Sie ist funktoriell in X und ordnet einem rig-Punkt $u : T \to X$ das Bild der korrespondierenden abgeschlossenen Immersion $T_{\mathrm{rig}} \to X_{\mathrm{rig}}$ zu.

Es sei $R_0 = R/\mathfrak{I}$ der Restklassenkörper von R. Dann heißt $X_0 := X \otimes_R R_0$ die *spezielle Faser* von X. Jeder rig-Punkt $T \to X$ induziert eine abgeschlossene Immersion $T_0 \to X_0$ und definiert daher einen abgeschlossenen Punkt der speziellen Faser von X. Daher bekommen wir eine kanonische *Spezialisationsabbildung*

$$X_{\mathrm{rig}} \to X_0 \, .$$

Diese Abbildung ist surjektiv auf die Menge der abgeschlossenen Punkte von X_0.

3.5 Morphismen in der lokalisierten Kategorie

Es sei wieder $S = \operatorname{Spf} R$ gegeben, und K sei wieder der Quotientenkörper von R. Im klassischen rigiden Fall kann die Kategorie der rigiden K-Räume mit der Kategorie der formellen R-Schemata modulo zulässiger formeller Aufblasungen identifiziert werden. Im allgemeinen Fall wählen wir diese Beschreibung als Definition.

Definition 3.5.1 *Die* **Kategorie der rigiden S-Räume** (Rig/S) *ist definiert als die Lokalisierung der Kategorie* (FSch/S) *der zulässigen formellen Schemata über* S *nach den zulässigen formellen Aufblasungen.*

Ein Morphismus $X \to Y$ in (Rig/S) ist definiert als eine Äquivalenzklasse eines Diagramms der Form

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X & Y \end{tikzcd}$$

wobei $X' \to X$ ein zulässige formelle Aufblasung ist. Zwei Diagramme $X \leftarrow X_1' \to Y$ und $X \leftarrow X_2' \to Y$ sind dabei äquivalent, falls eine zulässige formelle Aufblasung $X'' \to X$ gibt, die über X_1' und X_2' faktorisiert und folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, dotted] \arrow[dd, dotted] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddrr, dotted] & & \\ X_1' \arrow[dr] \arrow[drrr] & & X_2' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & X & & Y \end{tikzcd}$$

Um zwei Morphismen $X \to Y$ und $Y \to Z$, gegeben durch Diagramme $X \leftarrow X' \to Y$ und $Y \leftarrow Y' \to Z$, zu verketten, ziehen wir die Aufblasung $Y' \to Y$ mittels des Morphismus $X' \to Y$ zurück und erhalten eine zulässige formelle Aufblasung $X'' \to X'$, die das folgende Diagramm kommutativ macht. Schließlich wählen wir noch eine zulässige formelle Aufblasung $X''' \to X$, die über den Morphismus $X'' \to X$ faktorisiert. Das folgende Diagramm $X \leftarrow X''' \to Z$ repräsentiert dann die Komposition $X \to Y \to Z$.

$$\begin{tikzcd}
X''' \arrow[d] & & \\
X'' \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
X' \arrow[d] \arrow[dr] & Y' \arrow[d] \arrow[dr] & \\
X & Y & Z
\end{tikzcd}$$

3.6 Glattheit

Definition 3.6.1 *Es seien $f : X \to Y$ ein Morphismus klassischer rigider Räume und $x \in X$.*

*(i) f heißt **unverzweigt** in x, falls es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und eine Y-Immersion $j : U \hookrightarrow \mathbb{D}^n_Y$ gibt, so daß die Idealgarbe $\mathscr{J} := \ker j^*$ ein Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_N$ besitzt mit der Eigenschaft, daß $\Omega^1_{\mathbb{D}^n_Y/Y} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}^n_Y}} k(x)$ von den Differentialen $dg_1, \ldots, dg_N$ erzeugt wird.*

*(ii) f heißt **glatt** in x **von der relativen Dimension** r, falls es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und eine abgeschlossene Y-Immersion $j : U \hookrightarrow \mathbb{D}^n_Y$ gibt so, daß die Idealgarbe $\mathscr{J} := \ker j^*$ ein Erzeugendensystem $g_{r+1}, \ldots, g_n$ der Länge $n - r$ besitzt und die Differentiale $dg_{r+1}, \ldots, dg_n \in \Omega^1_{\mathbb{D}^n_Y/Y} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}^n_Y}} k(x)$ linear unabhängig sind.*

*(iii) f heißt **étale** in x, falls f glatt in x von der relativen Dimension 0 ist.*

Wie im algebraischen Falle sind die Eigenschaften unverzweigt, glatt und étale stabil unter Komposition, Basiswechsel und der Bildung von Faserprodukten.

Wir wollen nun den Begriff der Glattheit auf Morphismen formeller Schemata übertragen. Dies geschieht mittels des rig-Funktors, der im klassischen rigiden Fall eine bijektive Korrespondenz zwischen den rig-Punkten des formellen Schemas X und den Punkten von X_{rig} induziert.

Definition 3.6.2 *Es seien $f : X \to Y$ ein Morphismus formeller S-Schemata und x ein rig-Punkt von X.*

*(i) f heißt **quasi-endlich** in x, falls x isoliert in seiner Faser ist.*

(ii) *f heißt **unverzweigt** in x, falls es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und eine Y-Immersion $j : U \hookrightarrow \mathbb{D}_Y^n$ gibt so, daß die Idealgarbe $\mathscr{J} := \ker j^*$ ein Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_N$ besitzt mit der Eigenschaft, daß $\Omega^1_{\mathbb{D}_Y^n/Y} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_Y^n}} k(x)$ von den Differentialen $dg_1, \ldots, dg_n$ erzeugt wird.*

(iii) *f heißt **glatt** in x **von der relativen Dimension** r, falls es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und eine abgeschlossene Y-Immersion $j : U \hookrightarrow \mathbb{D}_Y^n$ gibt so, daß die Idealgarbe $\mathscr{J} := \ker j^*$ ein Erzeugendensystem $g_{r+1}, \ldots, g_n$ der Länge $n - r$ besitzt und die Differentiale $dg_{r+1}, \ldots, dg_n \in \Omega^1_{\mathbb{D}_Y^n/Y} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_Y^n}} k(x)$ linear unabhängig sind.*

(iv) *f heißt **étale** in x, falls f glatt in x von der relativen Dimension 0 ist.*

(v) *f heißt **rig-quasi-endlich**, bzw. **rig-unverzweigt**, bzw. **rig-glatt**, bzw. **rig-étale**, falls f quasi-endlich, bzw. unverzweigt, bzw. glatt, bzw. étale ist in allen rig-Punkten von X.*

Im klassischen rigiden Fall sind die Rig-Unverzweigteit, Rig-Glattheit und Rig-Ètaleheit eines Morphismus formeller Schemata $X \to Y$ gleichbedeutend mit der entsprechenden Unverzweigteit, Glattheit und Ètaleheiti der zugehörigen rigiden Räume $X_{\mathrm{rig}} \to Y_{\mathrm{rig}}$ im Sinne von Definition 3.6.1.

3.7 Eigentlichkeit im Fall formeller Modelle

Definition 3.7.1 *Ein Morphismus $f : X \to Y$ zulässiger formeller R-Schemata heißt* **eigentlich**, *falls die zugehörige Abbildung $f_0 : X_0 \to Y_0$ von algebraischen R_0-Schemata eigentlich ist.*

Diese Definition hängt mit der Definition für rigide Räume im Falle einer diskreten Bewertung wie folgt zusammen.

Satz 3.7.2 *Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zulässiger formeller R-Schemata, und es sei $f_{\mathrm{rig}} : X_{\mathrm{rig}} \to Y_{\mathrm{rig}}$ der zugehörige Morphismus rigider K-Räume. Zusätzlich sei R ein diskreter Bewertungsring. Dann ist f eigentlich genau dann, wenn f_{rig} eigentlich ist.*

Dies ist in ([17]), Theorem 3.1 bewiesen.

Die Rückrichtung dieser Behauptung beruht auf folgendem Lemma, das die relative Kompaktheit mittels formeller Modelle charakterisiert und auch für sich von Interesse ist.

Lemma 3.7.3 *Es sei $X \to Y = \operatorname{Spf} A$ ein Morphismus zulässiger formeller R-Schemata, und $U \subseteq X$ sei einen offenes Unterschema. Die zugehörigen rigiden Räume X_{rig} und Y_{rig} seien affinoid. Dann ist U_{rig} relativ kompakt in X_{rig} über Y_{rig} im Sinne von Definition 2.6.1 genau dann, wenn der schematische Abschluß $\overline{U_0}$ von U_0 in X_0 eigentlich über Y_0 ist.*

Beweis: (Siehe auch ([16]) Lemma 2.5) Da X_{rig} affinoid ist, gibt es in jedem Fall eine abgeschlossene Immersion

$$\varphi_{\text{rig}} : X_{\text{rig}} \hookrightarrow \mathbb{D}^r_{Y_{\text{rig}}}$$

für ein geeignetes r. Es sei etwa

$$\mathfrak{a}_{\text{rig}} \subseteq \mathcal{O}(Y_{\text{rig}})\langle\zeta_1, \dots, \zeta_r\rangle$$

das zugehörige Ideal, so daß

$$X_{\text{rig}} = V(\mathfrak{a}_{\text{rig}}) \subseteq \mathbb{D}^r_{Y_{\text{rig}}} .$$

Wir übertragen dies auf die formellen Modelle durch

$$\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_{\text{rig}} \cap \mathcal{O}(Y)\langle\zeta_1, \dots, \zeta_r\rangle, \quad V := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{D}^r_Y ,$$

wobei

$$\mathbb{D}^r_Y := \operatorname{Spf} A\langle\zeta_1, \dots, \zeta_r\rangle .$$

Es gilt somit $X_{\text{rig}} \cong V_{\text{rig}}$. Nach Satz 3.3.1 bzw. der Beschreibung der Morphismen in der lokalisierten Kategorie gibt es eine zulässige formelle Aufblasung $V \leftarrow X' \to X$ derart, daß die Abbildungen auf den rig-Räumen sich zu Morphismen der formellen Modelle ergänzen lassen. Man bekommt also ein Diagramm der Art

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X' \arrow[r, "\text{blow}"] \arrow[d, "\text{blow}"] & V \arrow[r, hook, "\text{abg.}"] \arrow[d] & \mathbb{D}^r_Y \arrow[dl] \\
U \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & Y \arrow[ur, bend right, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $U' := U \times_X X'$ ein offenes Unterschema von X' ist und τ der Nullschnitt sei.

Wir beweisen nun die Notwendigkeit der Bedingung. Es gebe also ein $|\varepsilon| < 1$ so, daß

$$\varphi_{\text{rig}}(U_{\text{rig}}) \subseteq \mathbb{D}^r_{Y_{\text{rig}}}(\varepsilon) .$$

Dann gilt $|\zeta_i| < 1$ auf U_{rig}, und U'_0 wird folglich in den Nullschnitt $\tau_0 : Y_0 \to \mathbb{A}^r_{Y_0}$ abgebildet, d.h.

$$\varphi_0(U'_0) \subseteq \tau_0(Y_0) .$$

Es folgt $\overline{U'_0} \subseteq \varphi_0^{-1}(\tau_0(Y_0))$, d.h. $\overline{U'_0}$ wird ebenfalls in den Nullschnitt $\tau(Y_0)$ abgebildet. Nun ist $X'_0 \to (\mathbb{D}^r_Y)_0$ eigentlich, da zulässige formelle Aufblasungen stets eigentlich sind. Daher ist

$$\overline{U'_0} \to (\mathbb{D}^r_Y)_0$$

eigentlich. Da das Bild im Nullschnitt $\tau(Y_0)$ enthalten ist, und da dieser endlich über Y_0 ist, folgt

$$\overline{U'_0} \to Y_0$$

eigentlich. Somit liegt folgende Situation vor.

$$\begin{tikzcd} \overline{U_0'} \arrow[r, "\text{surj.}"] \arrow[rr, bend right, "\text{eig.}"'] & \overline{U_0} \arrow[r, "\text{sep.}"] & Y_0 \end{tikzcd}$$

Nach [13], 5.4.3 (ii), ist $\overline{U_0} \to Y_0$ eigentlich.

Wir beweisen nun die Rückrichtung. Es sei also $\overline{U_0} \to Y_0$ eigentlich. Dann ist auch $\overline{U_0'} \to Y_0$ eigentlich, da $U' \to U$ eine zulässige formelle Aufblasung ist. Es sei B_0 das Bild von $\overline{U_0'}$ in V_0. Dann ist B_0 ein abgeschlossenes Unterschema des affinen Schemas V_0. B_0 ist daher affin und eigentlich über Y_0, also endlich über Y_0. Die Koordinaten $\zeta_1|_{B_0}, \ldots, \zeta_r|_{B_0}$ erfüllen mithin Ganzheitsgleichungen $F_i(\zeta_i|_{B_0}) = 0$ mit $F_i \in \mathcal{O}(Y)[\xi]$. Die Funktionen $F_1, \ldots, F_r$ definieren eine endliche Abbildung

$$F : \mathbb{D}_Y^r \to \mathbb{D}_Y^r ,$$

die B_0 in den Ursprung abbildet. Daher gibt es ein $\varepsilon < 1$ so, daß

$$F_{\mathrm{rig}}(U_{\mathrm{rig}}) \subseteq \mathbb{D}^r_{Y_{\mathrm{rig}}}(\varepsilon) .$$

Die Abbildung F und die Inklusion $\iota : \mathbb{D}^r_{Y_{\mathrm{rig}}} \hookrightarrow \mathbb{D}^r_{Y_{\mathrm{rig}}}(c)$ definieren für ein $|c| > 1$ eine abgeschlossene Immersion

$$(\iota, F) : X_{\mathrm{rig}} \hookrightarrow \mathbb{D}^r_{Y_{\mathrm{rig}}} \hookrightarrow \mathbb{D}^r_{Y_{\mathrm{rig}}}(c) \times_{Y_{\mathrm{rig}}} \mathbb{D}^r_{Y_{\mathrm{rig}}} .$$

Hier wird U_{rig} unter (ι, F) in $\mathbb{D}_{Y_{\mathrm{rig}}}(1) \times_{Y_{\mathrm{rigig}}} \mathbb{D}_{Y_{\mathrm{rig}}}(\varepsilon)$ abgebildet. Daher gilt

$$U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} X_{\mathrm{rig}} .$$

□

Korollar 3.7.4 *Aus* $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} X_{\mathrm{rig}}$ *und* $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{X_{\mathrm{rig}}} V_{\mathrm{rig}} \subseteq X_{\mathrm{rig}}$ *folgt* $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} V_{\mathrm{rig}}$.

Beweis: Es seien $\overline{U_0}^V$ bzw. $\overline{U_0}^X$ der schematische Abschluß von U_0 in V_0 bzw. X_0. Dann gilt nach Voraussetzung und Lemma 3.7.3

$$\begin{tikzcd} \overline{U_0}^V \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{eigentlich}"'] & \overline{U_0}^X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\text{eigentlich}"] & X_0 \arrow[r] & Y_0 \end{tikzcd}$$

Dann ist auch $\overline{U_0}^V \to Y_0$ eigentlich und somit auch die Komposition $\overline{U_0}^V \to Y_0$. Die Behauptung folgt. □

Korollar 3.7.5 *Es seien* $X \to Y$ *ein Morpshismus zulässiger formeller Schemata,* $V \subseteq X$ *ein abgeschlossenes Unterschema und* $U \subseteq V$ *ein offenes Umterschema. Die zugehörigen rigiden Räume* U_{rig}, V_{rig}, X_{rig} *und* Y_{rig} *seien alle affinoid. Es gelte* $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} V_{\mathrm{rig}}$. *Dann gilt auch* $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} X_{\mathrm{rig}}$.

Beweis: Es sei $\overline{U_0}$ der schmematische Abschluß von U_0 in V_0. Dann ist $\overline{U_0}$ auch der schematische Abschluß von U_0 in X_0, da V_0 ein abgeschlossenes Unterschema von X_0 ist. Dann folgt die Behauptung sofort aus dem vorigen Lemma. □.

Beispiel 3.7.6 *Es seien $c = (c_1, \dots, c_n)$ und $c' = (c'_1, \dots, c'_n)$ gegeben mit $c_i, c'_i \in K^\times$.*

(i) $\mathbb{D}^n_K(c) \Subset_K \mathbb{D}^n_K(c') \iff |c_i| < |c'_i|$ *für alle* i.

(ii) Es seien $1 \le c_i \le c'_i$ für alle i. Dann gilt $\mathbb{D}^n_K(c) \Subset_{\mathbb{D}^n_K} \mathbb{D}^n_K(c')$ genau dann, wenn $|c_i| < |c'_i|$ für alle i mit $|c'_i| < 1$.

Beweis: Die Rückrichtung ist jeweils klar im Falle $n = 1$, und der allgemeine Fall folgt durch Bildung von Produkten. Für die Hinrichtung von (i) wähle man eine zulässige formelle Aufblasung X von $S := \operatorname{Spf} R\langle c'^{-1}\zeta\rangle$ derart, daß die offene Immersion $\mathbb{D}^n_K(c) \hookrightarrow \mathbb{D}^n_K(c')$ von einem offenen Unterschema $U \subseteq X$ induziert wird. Dann ist das Bild von U_0 in S_0 zusammenhängend, affin und eigentlich über S_0, also endlich über S_0. Es besteht also nur aus dem Ursprung von S_0. Daraus folgt die Behauptung.
Für die Rückrichtung von (ii) verwendet man Lemma 3.7.4, um es auf den Fall (i) zu reduzieren. □

3.8 Vergrößerung von Teilbereichen nach Aufblasung

In diesem Abschnitt wollen wir erklären, wann sich ein offener affinoider Teilbereich U_{rig} eines rigiden Raums X_{rig} echt vergrößern läßt, d.h. wann es einen echt größeren affinoiden Teilbereich einer Aufblasung von X_{rig} gibt, in dem U_{rig} relativ kompakt und eventuell zusätzlich ein Weierstraßbereich ist.

Wir betrachten folgende Voraussetzungen.

- $X \to Y = \operatorname{Spf} A$ ist ein separierter Morphismus zulässiger formeller R-Schemata, und R ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring.
- $U \subseteq X$ ist ein offenes Unterschema und U_{rig} ist affinoid.
- Der schematische Abschluß $\overline{U_0}$ von U_0 in X_0 ist eigentlich über Y_0.

Dann läßt sich U_{rig} modulo einer Aufblasung von X echt vergrößern. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß eigentliche rigide Räume keinen Rand haben. Wir bemerken noch, daß im Falle X_{rig} affinoid die obige Voraussetzung gerade $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} X_{\mathrm{rig}}$ besagt. Sie ist somit notwendig.

Satz 3.8.1 *Unter obigen Voraussetzungen gibt es eine zulässige formelle Aufblasung $X' \to X$ und ein offenes Unterschema $U' \subseteq X'$ mit den folgenden Eigenschaften.*

(i) U'_{rig} ist affinoid, und der schematische Abschluß $\overline{U'_0}$ von U'_0 ist eigentlich über $\overline{U_0}$ und daher eigentlich über Y_0.

(ii) Der schematische Abschluß von $(U \times_X X')_0$ in X'_0 ist in U'_0 enthalten. Insbesondere gilt $U_{\mathrm{rig}} \Subset_{Y_{\mathrm{rig}}} U'_{\mathrm{rig}}$.

Wenn U zusätzlich affin ist, oder allgemeiner, wenn der schematische Abschluß $\overline{U_0}$ von U_0 in X_0 einen effektiven Cartier-Divisor zuläßt, welcher ample auf dem Rand von U_0 ist, dann kann man $X' \to X$ derart wählen, daß sein Zentrum disjunkt von U ist, und das offene Unterschema U' von X' derart, daß

(iii) die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}_{X'}(U')_{\mathrm{rig}} \to \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{rig}}$ ein dichtes Bild hat.

Insbesondere ist U_{rig} ein Weierstraßbereich von U'_{rig}.

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, dashed, "\text{blow}"'] & & U' \arrow[ll, dashed, hook'] \\
X \arrow[d] & & U \arrow[ll, hook'] \arrow[ur, dashed, hook] & \\
Y = \operatorname{Spf} A \arrow[d] & & & \\
\operatorname{Spf} R & & &
\end{tikzcd}$$

Dies ist ein tiefes, bekanntes Resultat. Zum Beweis siehe [16], Theorem 5.1.

Beispiel. Es sei mit obigen Bezeichnungen etwa

$$X_{\mathrm{rig}} = Y_{\mathrm{rig}} = \mathbb{D}^1_K \supseteq U_{\mathrm{rig}} = \mathbb{D}^1_K(c)$$

mit $|c| < 1$. Wegen $\overline{U_0} \to Y_0$ eigentlich bildet U_0 in eine endliche zusammenhängende Teilmenge von $Y_0 = \mathbb{A}^1_K$ ab, also in den Ursprung. Es sei $X' \to X$ die Aufblasung in (ζ, c), so daß

$$U'_{\mathrm{rig}} = \mathbb{D}^1(c')$$

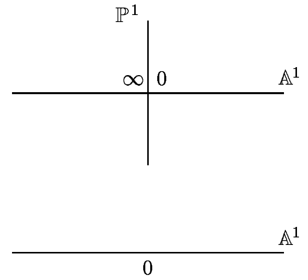
mit $|c| < |c'| < 1$. Es sei

$$\hat{U} := U \times_X X'.$$

Dann folgt

$$\overline{\hat{U}_0} \subseteq U'_0.$$

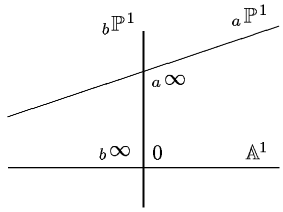
Die speziellen Fasern X_0 und Y_0 sehen wie folgt aus.



Dabei hat $\mathbb{P}^1$ die Koordinate $c^{-1}\zeta$ und $\mathbb{A}^1$ die Koordinate ζ. Es gilt

$$U_0 \;=\; \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}\;.$$

Das Zentrum der Aufblasung $X' \to X$ ist hier also gleich $\{\infty\}$ und disjunkt von U_0. Die spezielle Faser X_0' sieht wie folgt aus.



Dabei hat $_a\mathbb{P}^1$ die Koordinate $c'^{-1}\zeta$, $_b\mathbb{P}^1$ hat die Koordinate $c^{-1}\zeta$, und $\mathbb{A}^1$ hat die Koordinate ζ. Es gilt

$$U_0' \;=\; {}_a\mathbb{P}^1 \,\cup\, {}_b\mathbb{P}^1 \setminus \{{}_b\infty\}\;,\quad \hat{U}_0 \;=\; {}_a\mathbb{P}^1 \setminus \{{}_a\infty\}\;.$$

Kapitel 4

Approximation und Ausdehnung

4.1 Lemma von Elkik

In [12] beweist R. Elkik ein Resultat über die Existenz von Lösungen polynomialer Gleichungssysteme über henselschen Ringen, wenn Approximationen von Lösungen vorliegen, unter speziellen Voraussetzungen an das Gleichungssystem. Das erste Lemma in jener Arbeit erklärt, wie man aus einer approximativen Lösung eine echte Lösung gewinnt, die nahe der approximativen Lösung liegt, sofern eine geeignet formulierte Glattheitsbedingung erfüllt ist.

Der entscheidende technische Trick wird hier als gesondertes Lemma formuliert. Diese Technik wird im nächsten Paragraphen dann auf konvergente Potenzreihen übertragen

Es seien A ein Ring, B eine endlich präsentierte A-Algebra, d.h. $B = A[Y]/I$ mit $I = (f_1, \ldots, f_q) \leq A[Y]$ für gewisse $f_1, \ldots, f_q \in A[Y] = A[Y_1, \ldots, Y_N]$. Für jedes $p \in \{1, \ldots, q\}$ und jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ mit $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_p \leq q$ sei

$$\begin{aligned} F_\alpha &:= (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_p}) \leq A[Y] \\ K_\alpha &:= \{g \in A[Y] \; ; \; gI \subseteq F_\alpha\} \\ M_\alpha &:= \left(\frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial Y_j} \right)_{i=1,\ldots,p,\ j=1,\ldots,N} \end{aligned}$$

und $\Delta_\alpha \leq A[Y]$ sei das von allen p-Minoren der Matrix M_α erzeugte Ideal. Ferner sei $H_B \leq A[Y]$ ein Ideal mit

$$H_B \subseteq \sum_{p,\alpha} K_\alpha \Delta_\alpha \, ,$$

wobei die Summe über alle $p \in \{1, \ldots, q\}$ und alle Multiindices α wie oben gebildet werde. Für beliebiges $\mathrm{a} \in A^N$ sei stets

$$I(\mathrm{a}) := \{g(\mathrm{a}) \; ; \; g \in I\} \, .$$

Eine Lösung $\mathrm{a} \in A^N$ des gegebenen Gleichungssystems $\mathrm{f}(Y) = 0$ mit $\mathrm{f} := (f_1, \ldots, f_q)$ bedeutet also, daß $I(\mathrm{a}) = 0$ gilt. Unter einer approximativen Lösung versteht man dann ein $\mathrm{a} \in A^N$ mit $I(\mathrm{a}) \subseteq (\pi)^n$ für einen Parameter π und ein $n \geq 1$.

Satz 4.1.1 (Lemma von Elkik) *Es seien $\pi \in A$ so, daß A vollständig sei bezüglich der (π)-adischen Topologie, $\Lambda := \{a \in A |\ a\pi^m = 0 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$, $k, h, n \in \mathbb{N}$ so, daß*

$$\Lambda \cap (\pi)^k = (0) ,$$

$$n > \max\{2h, h + k\} ,$$

$\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_N)^{\mathrm{t}} \in A^N$ *mit*

$$\begin{aligned} H_B(\mathrm{a}) &\supseteq (\pi)^h , \\ I(\mathrm{a}) &\subseteq (\pi)^n . \end{aligned}$$

Dann gibt es ein $\mathrm{a}^0 = (a_1^0, \ldots, a_N^0)^{\mathrm{t}} \in A^N$ *mit*

$$\mathrm{a}^0 \equiv \mathrm{a} \mod \pi^{n-h} ,$$

$$I(\mathrm{a}^0) = 0 .$$

Die Bedingung $H_B(\mathrm{a}) \supseteq (\pi)^h$ bedeutet gerade, daß B über A eine gewisse Glattheitsbedingung erfüllt.

Wir wollen dem Beweis ein technisches Lemma voranstellen. Die Voraussetzungen sind allgemein genug gehalten, damit es auch im nächsten Paragraphen verwendet werden kann. Das in diesem Lemma konstruierte z erlaubt es dann, eine approximative Lösung des Gleichungssystems zu verbessern.

Lemma 4.1.2 *Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ ein Multiindex, δ ein p-Minor von M_α und $g \in A[Y]$ mit*

$$gI \subseteq F_\alpha + \pi^{2n} A[Y] .$$

Es gelte

$$I(\mathrm{a}) \subseteq (\pi)^n .$$

Es sei $M := \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)_{i=1,\ldots,q,\ j=1,\ldots N}$. *Dann gibt es ein* $\mathrm{z} \in A^N$ *mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &\equiv 0 &&\mod \pi^n , \\ g(\mathrm{a})\delta(\mathrm{a})\mathrm{f}(\mathrm{a}) &\equiv M(\mathrm{a})\mathrm{z} &&\mod \pi^{2n} . \end{aligned}$$

Beweis: Es sei o.B.d.A. $\alpha = (1, \ldots, p)$. Ferner können wir annehmen, daß der p-Minor δ von M_α genau die Variablen $Y_1, \ldots, Y_p$ involviert, d.h. es gilt

$$\delta = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,p} .$$

Für $j = p+1, \ldots, q$ gilt nach Voraussetzung

$$g f_j \;\equiv\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} f_i \mod \pi^{2n} A[Y]$$

mit gewissen $\lambda_{ij} \in A[Y]$. Daraus folgt durch Ableiten für $j = p+1, \ldots, q$ und $l = 1, \ldots, N$, daß

$$g \, \frac{\partial f_j}{\partial Y_l} \;\equiv\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \, \frac{\partial f_i}{\partial Y_l} \mod I + (\pi^{2n}) A[Y] \, .$$

Durch Einsetzen von a erhalten wir unter Beachtung von $I(\mathrm{a}) \subseteq (\pi)^n$, daß

$$\begin{aligned} g(\mathrm{a}) f_j(\mathrm{a}) \;&\equiv\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\mathrm{a}) f_i(\mathrm{a}) \mod \pi^{2n} \, , && (4.1) \\ g(\mathrm{a}) \, \frac{\partial f_j}{\partial Y_l}(\mathrm{a}) \;&\equiv\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\mathrm{a}) \, \frac{\partial f_i}{\partial Y_l}(\mathrm{a}) \mod \pi^{n} \, . \end{aligned}$$

Also gilt für jeden Vektor $\mathrm{b} = (b_1, \ldots, b_q)^{\mathrm{t}}$ im Bild von $M(\mathrm{a})$ für $j = p+1, \ldots, q$, daß

$$g(\mathrm{a}) b_j \;\equiv\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\mathrm{a}) b_i \mod \pi^{n} \, . \qquad (4.2)$$

Falls es ein $\mathrm{c} = (c_1, \ldots, c_N) \in A^N$ gibt derart, daß

$$\mathrm{b} \;=\; M(\mathrm{a}) \cdot \mathrm{c} \, , \quad c_i \in (\pi)^n, \; i = 1, \ldots, N \, , \qquad (4.3)$$

so gilt die Kongruenz (4.2) sogar $\mod \pi^{2n}$. Es sei

$$M_0 := \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}(\mathrm{a}) \right)_{i,j=1,\ldots,p} \, ,$$

d.h.

$$\delta(\mathrm{a}) \;=\; \det M_0 \, .$$

Es sei $N_0 \in A^{p \times p}$ die adjungierte Matrix zu M_0, d.h. es gilt

$$M_0 \cdot N_0 \;=\; N_0 \cdot M_0 \;=\; \delta(\mathrm{a}) \cdot \mathrm{E}_p \, ,$$

wobei E_p die p-dimensionale Einheitsmatrix sei. Man fülle N_0 durch Nullzeilen zu einer Matrix $N_0' \in A^{N \times p}$ auf. Es gilt dann

$$M(\mathrm{a}) \cdot N_0' \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathrm{a}) \\ \vdots \\ f_p(\mathrm{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(\mathrm{a}) f_1(\mathrm{a}) \\ \vdots \\ \delta(\mathrm{a}) f_p(\mathrm{a}) \\ u_{p+1} \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix} =: \mathrm{b}$$

mit gewissen $u_{p+1}, \dots, u_q \in A$. Damit erfüllt b die Voraussetzung (4.3), und nach (4.2) folgt für $j = p+1, \dots, q$ dann

$$\begin{aligned} g(\mathrm{a})u_j &\equiv \delta(\mathrm{a}) \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}(\mathrm{a}) f_i(\mathrm{a}) && \bmod \pi^{2n} \\ &\underset{(4.1)}{\equiv} \delta(\mathrm{a}) g(\mathrm{a}) f_j(\mathrm{a}) && \bmod \pi^{2n} . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} M(\mathrm{a}) \cdot N_0' \cdot g(\mathrm{a}) \begin{pmatrix} f_1(\mathrm{a}) \\ \vdots \\ f_p(\mathrm{a}) \end{pmatrix} &= g(\mathrm{a})\mathrm{b} \\ &\equiv g(\mathrm{a})\delta(\mathrm{a})\mathrm{f}(\mathrm{a}) \mod \pi^{2n} . \end{aligned}$$

Mit

$$\mathrm{z} := N_0' \cdot g(\mathrm{a}) \begin{pmatrix} f_1(\mathrm{a}) \\ \vdots \\ f_p(\mathrm{a}) \end{pmatrix}$$

folgt die Behauptung. □

Beweis des Lemmas von Elkik: Es genügt zu zeigen, daß es ein $\mathrm{y} \in A^N$ gibt mit

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &\equiv 0 \mod \pi^{n-h} , \\ I(\mathrm{a}-\mathrm{y}) &\subseteq (\pi)^{2n-2h} . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Denn wegen $2n - 2h > n$ kann man nun eine Folge $(\mathrm{a}, \mathrm{a}-\mathrm{y}, \dots)$ von Punkten in A^N konstruieren, die aufgrund der Vollständigkeit von A gegen eine Lösung a^0 konvergiert.

Wir müssen nachweisen, daß die Voraussetzung $H_B(\mathrm{a}-\mathrm{y}) \supseteq (\pi)^h$ erfüllt ist. Es gilt wegen $\mathrm{y} \equiv 0 \mod \pi^{n-h}$ nach Taylorentwicklung vom Grade 2

$$g(\mathrm{a}) = g(\mathrm{a}-\mathrm{y}+\mathrm{y}) \in H_B(\mathrm{a}-\mathrm{y}) + (\pi)^{n-h}$$

für alle $g \in H_B$. Daraus folgt wegen $n - h \geq h + 1$, daß

$$\pi^h \in H_B(\mathrm{a}) \subseteq H_B(\mathrm{a}-\mathrm{y}) + (\pi)^{h+1} .$$

Folglich gibt es ein $a \in A$ so, daß

$$\pi^h(1 - \pi a) \in H_B(\mathrm{a}-\mathrm{y}) .$$

Wegen $1 - \pi a \in A^\times$ liefert dies $\pi^h \in H_B(\mathrm{a}-\mathrm{y})$.

Wir wollen nun die Existenz von $\mathrm{y} \in A^N$ zeigen, welches die Bedingungen (4.4) erfüllt. Es sei

$$M := \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j} \right)_{i=1,\dots,q,\; j=1,\dots,N} .$$

Wir verwenden von nun an Vektorschreibweise, d.h. wir schreiben f für den Vektor $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix}$, y für den Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ etc.

Durch Taylorentwicklung vom Grade 2 erhält man für beliebiges $\mathrm{y} \in A^N$

$$\mathrm{f}(\mathrm{a}-\mathrm{y}) = \mathrm{f}(\mathrm{a}) - M(\mathrm{a})\mathrm{y} + \sum_{i,j} \mathrm{Q}_{ij}(\mathrm{a},\mathrm{y}) y_i y_j$$

mit Vektoren $\mathrm{Q}_{ij}(\mathrm{a},\mathrm{y})$ der Länge q, deren Einträge Polynome in $A[a_1,\dots,a_N,y_1,\dots,y_N]$ sind. Es genügt also zu zeigen, daß es ein $\mathrm{y} \in A^N$ gibt mit

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &\equiv 0 && \bmod \pi^{n-h}, \\ \mathrm{f}(\mathrm{a}) &\equiv M(\mathrm{a})\mathrm{y} && \bmod \pi^{2n-2h}. \end{aligned}$$

Es sei nun $p \in \{1,\dots q\}$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ ein Multiindex, δ ein p-Minor von M_α und $g \in K_\alpha$. Nach Lemma 4.1.2 gibt es zu jedem Tripel (α,δ,g) ein $z \in A^N$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &\equiv 0 && \bmod \pi^{n} \\ g(\mathrm{a})\delta(\mathrm{a})\mathrm{f}(\mathrm{a}) &\equiv M(\mathrm{a})\mathrm{z} && \bmod \pi^{2n}. \end{aligned}$$

Wegen $\pi^h \in H_B(\mathrm{a})$ ist π^h Summe gewisser $g(\mathrm{a})\delta(\mathrm{a})$, und es folgt dann

$$\pi^h \mathrm{f}(\mathrm{a}) \equiv M(\mathrm{a})\tilde{\mathrm{z}} \mod \pi^{2n}$$

für ein $\tilde{\mathrm{z}} \in A^N$ mit $\tilde{\mathrm{z}} \equiv 0 \mod \pi^n$. Schreibt man nun $\tilde{z}_i = \pi^h y_i$ mit $y_i \in (\pi)^{n-h}$ für $i = 1,\dots,N$, so ergibt sich

$$\pi^h \mathrm{f}(\mathrm{a}) \equiv \pi^h M(\mathrm{a})\mathrm{y} \mod \pi^{2n}.$$

Wegen $\Lambda \cap (\pi)^{n-h} = (0)$ und $f_i(\mathrm{a}) \in (\pi)^n$ sowie $y_i \in (\pi)^{n-h}$ folgt somit

$$\mathrm{f}(\mathrm{a}) \equiv M(\mathrm{a})\mathrm{y} \mod \pi^{2n-h}.$$

Damit ist also die Behauptung bewiesen. □

Wir wollen noch den noetherschen Fall erläutern. In diesem Falle kann man die Bedingung lockern, daß die Topologie auf A von einem Hauptideal definiert werde.

Satz 4.1.3 *Es sei A noethersch, $\mathfrak{a} \le A$ so, daß A ein vollständiger $\mathfrak{a}$-adischer Ring sei. Dann gibt es zu jedem $h \in \mathbb{N}_0$ ein Paar $(n_0,r) \in \mathbb{N}_0^2$ so, daß für alle $n > n_0$, $\mathrm{a}^0 = (a_1^0,\dots,a_N^0)^{\mathrm{t}} \in A^N$ mit*

$$\begin{aligned} H_B(\mathrm{a}) &\supseteq \mathfrak{a}^h, \\ I(\mathrm{a}) &\subseteq \mathfrak{a}^n \end{aligned}$$

ein $\mathrm{a} = (a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{t}} \in A^N$ existiert mit

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^0 &\equiv \mathrm{a} \mod \mathfrak{a}^{n-r}, \\ I(\mathrm{a}^0) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{a} = (t_1, \ldots, t_l)$. Wir führen Induktion nach l .

Im Falle $l = 0$ ist die Behauptung trivial. Wir nehmen also an, die Behauptung sei bewiesen für $l-1$ Erzeuger von $\mathfrak{a}$. Es sei

$$\Lambda \ := \ \{a \in A |\ a t_1^m = 0 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\} \ .$$

Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\Lambda \cap (t_1)^k = (0) \ .$$

Es sei $s > \max\{2h, h+k\}$ fest. Wir setzen

$$A_1 \ := \ A/t_1^s \ .$$

Wendet man die Induktionshypothese auf A_1 an, so findet man n_0', r' so, daß für alle $n > n_0'$ und alle $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}} \in A^N$ mit $H_B(\mathrm{a}) \supseteq \mathfrak{a}^h$ und $I(\mathrm{a}) \subseteq \mathfrak{a}^n$ ein $\mathrm{a}' = (a_1', \ldots, a_N')^{\mathrm{t}} \in A^N$ existiert mit $\mathrm{a}' \equiv \mathrm{a} \mod \mathfrak{a}^{n-r'}$, $\mathrm{a}' \in t_1^s A^N$ und

$$I(\mathrm{a}') \ \subseteq \ (t_1)^s \cap \mathfrak{a}^{n-r'} \ .$$

Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt es $n_1, \lambda \in \mathbb{N}$ so, daß für $n - r' > n_1$ gilt

$$I(\mathrm{a}') \ \subseteq \ t_1^s \ \mathfrak{a}^{n-r'-\lambda} \ .$$

Andererseits gilt

$$\mathfrak{a}^h \subseteq H_B(\mathrm{a}) \ \subseteq \ H_B(\mathrm{a}') + \mathfrak{a}^{n-r'} \ .$$

Ist n groß genug, so daß $n - r' > h$, so folgt nach dem Lemma von Nakayama

$$H_B(\mathrm{a}') \ \supseteq \ \mathfrak{a}^h \ \supseteq \ (t_1)^h \ .$$

Nach dem Lemma von Elkik gibt es ein $\mathrm{b} = (b_1, \ldots, b_N)^{\mathrm{t}} \in A^N$ so, daß

$$I(\mathrm{b}) \ = \ 0$$

und

$$b_i - a_i' \ \in \ t_1^{s-h} \cdot \mathfrak{a}^{n-r'-h} \ \subseteq \ \mathfrak{a}^{n+s-(r'+\lambda+h)} \ .$$

Das beweist die Behauptung. □

4.2 Der Liftungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir die Techniken des Lemmas von Elkik auf konvergente Potenzreihen anwenden. Zunächst soll eine approximative Lösung eines Gleichungssystems konvergenter Potenzreihen über einer topologisch endlich präsentierten A-Algebra verbessert werden, indem man die Situation durch Reduktion modulo π^{2n} auf Polynome zurückführt. Im rig-glatten Fall wird dann der Liftungssatz hergeleitet, demzufolge sich ein Schnitt, der auf einem bestimmten Level gegeben ist, sich approximativ fortsetzen läßt zu einem tatsächlichen Schnitt. Dieses Ergebnis führt dann zum Ausdehnungssatz, demzufolge sich im rig-glatten Fall ein Morphismus, der auf einem Weierstraßbereich gegeben ist und dessen Bild relativ-kompakt ist, nach Aufblasung auf einen echt größeren Teilbereich ausdehnen läßt.

Es sei A ein vollständiger $\mathfrak{a}$-adischer Ring, und B sei eine topologisch endlich präsentierte A-Algebra, etwa $B = A\langle Y\rangle/I$ mit $I = (f_1, \dots, f_q) \leq A\langle Y\rangle$ für gewisse $f_1, \dots, f_q \in A\langle Y\rangle = A\langle Y_1, \dots, Y_N\rangle$. Die Objekte F_α, K_α, M_α und Δ_α seien nun in analoger Weise wie im vorangehenden Paragraphen definiert, d.h.

$$\begin{aligned} F_\alpha &:= (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_p}) \leq A\langle Y\rangle \\ K_\alpha &:= \{g \in A\langle Y\rangle \ ; \ gI \subseteq F_\alpha\} \\ M_\alpha &:= \left(\frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial Y_j}\right)_{i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,N} \end{aligned}$$

und $\Delta_\alpha \leq A\langle Y\rangle$ sei das von allen p-Minoren der Matrix M_α erzeugte Ideal.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := A/\mathfrak{a}^n$, $I_n := I \otimes_A A_n$ und $B_n := B \otimes_A A_n = B/\mathfrak{a}^n$. Dann gilt $I_n \leq A_n[Y]$ und $B_n = A_n[Y]/I_n$.

Es sei C eine zulässige A-Algebra. Im ersten Schritt wollen wir einen A_n-Morphismus $B_n \to C_n$ durch einen $A_{n'}$-Morphismus $B_{n'} \to C_{n'}$ approximieren für ein $n' > n$. Die Approximation soll dabei durch ein festes h gesteuert werden, das eine gewisse Glattheitsbedingung von B über A erfüllt.

$$\begin{tikzcd} C_{n'} \arrow[r] & C_n \\ B_{n'} \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\sigma_{n'}"] & B_n \arrow[u, "\sigma_n"'] \end{tikzcd} \qquad \text{wobei } \sigma_{n'} \equiv \sigma_n \mod \pi^{n-h}$$

Satz 4.2.1 (Potenzreihenversion des Lemmas von Elkik) *Es seien $\mathfrak{a} = \pi A$ ein Hauptideal und π kein Nullteiler in A. Es sei h so, daß*

$$\pi^h \in \sum_{p,\alpha} K_\alpha \Delta_\alpha .$$

Es seien $n > 2h$ und

$$\sigma_n : B_n \to C_n = C \otimes_A A_n$$

ein A_n-Homomorphismus. Dann gibt es einen A_{2n-2h}-Homomorphismus

$$\sigma_{2n-2h} : B_{2n-2h} \to C_{2n-2h} ,$$

der mit σ_n bis zum Level $n-h$ übereinstimmt, d.h. die von σ_{2n-2h} und σ_n induzierten Abbildungen $B_{n-h} \to C_{n-h}$ stimmen überein.

Beweis: Es seien $c_1, \dots, c_N \in C$ Liftungen der Bilder von $Y_1, \dots, Y_N$ unter der Abbildung

$$A\langle Y\rangle \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B_n \to C_n .$$

Wir liften die Bilder der $f_1, \ldots, f_q$ in $A_{2n}[Y]$ zu Polynomen

$$f_1^*, \ldots, f_q^* \in A[Y].$$

Es seien dann $I^* := (f_1^*, \ldots, f_q^*) \leq A[Y]$, $F_\alpha^* \leq A[Y]$, M_α^* und $\Delta_\alpha^* \leq A[Y]$ wie im Lemma von Elkik definiert. Ferner sei in Abweichung von dortiger Definition

$$K_\alpha^* := \{g \in A[Y] \,;\, gI^* \subseteq F_\alpha^* + \pi^{2n}A[Y]\}.$$

Dann besagen die Voraussetzungen gerade

$$\begin{aligned} \pi^h &\in \left(\sum_{p,\alpha} K_\alpha^* \Delta_\alpha^*\right)(\mathrm{c}) + \pi^{2n}C, \qquad (4.5) \\ I^*(\mathrm{c}) &\subseteq \pi^n C, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{c} := (c_1, \ldots, c_N)$. Es sei

$$M^* := \left(\frac{\partial f_i^*}{\partial Y_j}\right)_{i=1,\ldots,q,\, j=1,\ldots,N}.$$

Wir verwenden wieder die Vektorschreibweise

$$\mathrm{f}^* = \begin{pmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ f_q^* \end{pmatrix}, \ \mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in C^N.$$

Durch Taylorentwicklung vom Grade 2 erhält man für beliebiges $\mathrm{y} \in C^N$

$$\mathrm{f}^*(\mathrm{c} - \mathrm{y}) = \mathrm{f}^*(\mathrm{c}) - M^*(\mathrm{c})\mathrm{y} + \sum_{i,j} \mathrm{Q}_{ij}(\mathrm{c}, \mathrm{y}) y_i y_j$$

mit Vektoren $\mathrm{Q}_{ij}(\mathrm{c}, \mathrm{y})$ der Länge q, deren Einträge Polynome in $A[c_1, \ldots, c_N, y_1, \ldots, y_N]$ sind. Wir wollen zeigen, daß es ein $\mathrm{y} \in C^N$ gibt mit

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &\equiv 0 && \mod \pi^{n-h}, \\ \mathrm{f}^*(\mathrm{c}) &\equiv M^*(\mathrm{c})\mathrm{y} && \mod \pi^{2n-2h}. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Denn dann definiere man $\mathrm{c}^0 := \mathrm{c} - \mathrm{y}$ und eine Abbildung

$$A_{2n-2h}[Y] \to C_{2n-2h}, \quad Y \mapsto \mathrm{c}^0.$$

Es gilt dann $f^*(\mathrm{c}^0) \equiv 0 \mod \pi^{2n-2h}$, d.h. diese Abbildung faktorisiert über B_{2n-2h} und liefert so die gewünschte Abbildung σ_{2n-2h}. Wegen

$$\mathrm{c}^0 \equiv \mathrm{c} \mod \pi^{n-h}$$

stimmt diese mit σ_n auf dem Level $n-h$ überein.

Wir wollen nun zeigen, daß es ein $\mathrm{y} \in C^N$ gibt, welches (4.6) erfüllt. Es sei $p \in \{1, \ldots q\}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ ein Multiindex, δ ein p-Minor von M_α^* und $g \in$

K_α^*. Wir wollen Lemma 4.1.2 auf C anstelle von A anwenden und betrachten dazu alle über A definierten Polynome als Polynome über C vermöge der Abbildung $A \to C$. Nach jenem Lemma gibt es zu jedem Tripel (α, δ, g) ein $\mathrm{z} \in C^N$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &\equiv 0 && \mod \pi^n \\ g(\mathrm{c})\delta(\mathrm{c})\mathrm{f}^*(\mathrm{c}) &\equiv M^*(\mathrm{c})\mathrm{z} && \mod \pi^{2n}. \end{aligned}$$

Nach (4.5) ist π^h Summe gewisser $g(\mathrm{c})\delta(\mathrm{c})$ modulo π^{2n}, und es folgt dann

$$\pi^h \mathrm{f}^*(\mathrm{c}) \equiv M^*(\mathrm{c})\tilde{\mathrm{z}} \mod \pi^{2n}$$

für ein $\tilde{\mathrm{z}} \in A^N$ mit $\tilde{\mathrm{z}} \equiv 0 \mod (\pi)^n$. Schreibt man nun $\tilde{z}_i = \pi^h y_i$ mit $y_i \in (\pi)^{n-h}$ für $i = 1, \ldots, N$, so ergibt sich

$$\pi^h \mathrm{f}^*(\mathrm{c}) \equiv \pi^h M(\mathrm{c})\mathrm{y} \mod \pi^{2n},$$

und da π kein Nullteiler in C ist, folgt

$$\mathrm{f}^*(\mathrm{c}) \equiv M^*(\mathrm{c})\mathrm{y} \mod \pi^{2n-h}$$

Damit ist also die Behauptung bewiesen. □

Wir wollen dieses Ergebnis nun verwenden, um einen Liftungssatz für den Fall eines rig-glatten formellen S-Schemas herzuleiten. Es sei dazu A wie bisher und $S_n := \operatorname{Spf} A_n$, und für ein beliebiges zulässiges formelles R-Schema sei an die Definition $X_n = X \otimes_A A_n$ erinnert.

Satz 4.2.2 *Es seien T und V zulässige affine formelle S-Schemata, und V sei rig-glatt über S. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathbb{N}$, welche nur von V abhängen derart, daß es zu jedem $n \geq n_0$ und jedem A_n-Homomorphismus $\sigma_n : T_n \to V_n$ einen A_{n+1}-Homomorphismus $\sigma_{n+1} : T_{n+1} \to V_{n+1}$ gibt mit $\sigma_{n+1} \equiv \sigma_n \mod t^{n-h}$, d.h. σ_{n+1} und σ_n stimmen auf dem Level $n-h$ überein. Insgesamt erhält man ein System von Morphismem*

$$\left(\sigma_\nu|_{T_{\nu-h}}\right)_{\nu \geq n},$$

welches einen S Morphismus $\sigma : T \to V$ definiert. Ist σ_n ein Isomorphismus, so ist auch σ ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl] \arrow[d, dashed, "\exists\sigma"] & \cdots \arrow[l, hook'] & T_{n+1} \arrow[l, hook'] \arrow[d, dashed, "\exists\sigma_n"] & T_n \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\sigma_n"] \\
S & V \arrow[l, "\text{rig-glatt}"'] & \cdots \arrow[l, hook'] & V_{n+1} \arrow[l, hook'] & V_n \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Beweis: Es sei etwa $V \to S$ rig-glatt von der relativen Dimension $N - m$. Wir schreiben

$$V = \operatorname{Spf} A\langle Y \rangle / I$$

mit $I = (f_1, \ldots, f_q) \leq A\langle Y \rangle$. Es sei

$$M := \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j} \right)_{i=1,\ldots q,\, j=1,\ldots N}.$$

Es sei nun x ein rig-Punkt von V. Dann ist V rig-glatt über S in x, und nach dem Jacobikriterium gibt es einen Multiindex α der Länge m und einen $m \times m$-Minor $\delta \in \Delta_\alpha$ von M_α derart, daß

$$\begin{aligned} \delta(x) &\neq 0 \, , \\ I_x &= (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_m})_x \, . \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann

$$(\delta K_\alpha)_x = A_x \, .$$

Da dies für alle rig-Punkte von V gilt, folgt

$$\left(\sum_\alpha K_\alpha \Delta_\alpha \right)_\pi = A_\pi \, .$$

Dann gibt es ein $h > 0$ gibt derart, daß

$$\pi^h \in \sum_\alpha K_\alpha \Delta_\alpha \, .$$

Setzt man $n_0 := 2h+1$, so sind für $n \geq n_0$ die Voraussetzungen von Satz 4.2.1 erfüllt. Wegen $2n - 2h > n$ folgt die Existenz von σ_{n+1} wie behauptet. Per Induktion bekommt man ein System von Morphismen σ_ν für $\nu \geq n$. Wegen

$$T = \varinjlim_n T_n \, , \quad V = \varinjlim_n V_n$$

erhält man so einen Morphismus

$$\sigma = \varinjlim_n \sigma_n \, .$$

Es sei nun σ_n ein Isomorphismus. Nun ist σ_{n+1} ein Isomorphismus modulo π, und V_{n+1} und T_{n+1} sind flach über S_{n+1}. Daraus folgt, daß auch σ_{n+1} flach ist, nach dem Kriterium für Flachheit auf den Fasern. Dann ist σ_{n+1} ein offene Immersion, und folglich ein Isomorphismus. $\square$

Damit können wir den Approximationssatz im rig-glatten Fall beweisen. Die Voraussetzung der rig-Glattheit wird dann im nächsten Kapitel durch den Glättungssatz beseitigt.

Satz 4.2.3 *Es sei $V \subseteq \mathbb{D}_S^N$ eine abgeschlossene Untervarietät, die* **rig-glatt** *über S ist. Es seien $Z \to S$ ein Morphismus zulässiger formeller Schemata und $U \subseteq Z$ ein offenes formelles Unterschema. Es sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt.*

(1) Z_{rig} ist affinoid und U_{rig} ist ein Weierstraßbereich in Z_{rig}.

(2) Z ist eigentlich über einem affinen formellen Schema, U ist affin, und der zugrundeliegende Bewertungsring sei diskret.

Es sei $\varphi : U \to V$ ein S-Morphismus so, daß $\varphi(U) \Subset_S V$, und es sei $\lambda_0 \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine zulässige formelle Aufblasung $Z' \to Z$, welche endlich über U ist, und ein offenes Unterschema $U' \subseteq Z'$ so, daß

(a) *der schematisch Abschluß von* $(Z' \times_Z U)_0$ *in* Z'_0 *in* U'_0 *enthalten ist,*

(b) $\overline{U'_0}$ *eigentlich über* $\overline{U_0}$ *ist, und*

(c) *es einen Morphismus* $\varphi' : U' \to V$ *gibt so, daß* $\varphi'|_U$ *mit* φ *bis zum Level* λ_0 *übereinstimmt.*

Falls $\psi : \tilde{U} \to \tilde{V}$ *ein weiteres Modell von* φ_{rig} *ist, wobei* $\tilde{U}$ *ein offenes Unterschema eines Modells* $\tilde{Z}$ *von* Z_{rig} *ist, so existiert eine Aufblasung* $\tilde{Z}' \to \tilde{Z}$, *ein offenes Unterschema* $\tilde{U}' \subseteq \tilde{Z}'$ *mit den Eigenschaften (a) und (b), und es gibt einen Morphismus* $\psi' : \tilde{U}' \to \tilde{V}$ *so, daß* $\psi'|_{\tilde{U}}$ *mit* ψ *bis zum Level* λ_0 *übereinstimmt.*

$$\begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl, dashed, "blow"'] & & U' \arrow[ll, dashed, hook'] \arrow[ddl, dashed, "\varphi'"] \\
Z \arrow[d] & & U \arrow[ll, hook'] \arrow[ur, dashed, hook] \arrow[d, "\varphi(U)\Subset_S V"'] & \\
S & & V \arrow[ll, "\text{rig-glatt}"] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Nach Satz 3.8.1 können wir in jedem Falle annehmen, daß Z_{rig} affinoid ist und daß U_{rig} ein Weierstraßbereich in Z_{rig} ist. Man setze $\lambda = \lambda_0 + n_0$, wobei n_0 wie in 4.2.2 gewählt sei. Verkettet man den Morphismus φ mit der abgeschlossenen Immersion $V \hookrightarrow \mathbb{D}_S^N$, so bekommt man einen Morphismus

$$\psi : U \xrightarrow{\varphi} V \hookrightarrow \mathbb{D}_S^N \ .$$

Es seien $Y_1, \ldots, Y_N$ die Koordinaten von $\mathbb{D}_S^N$, und es sei

$$y_i \ := \ \psi^* Y_i \ \in \ C \ := \ \mathcal{O}_Z(U)$$

für $i = 1, \ldots, N$. Es gibt $\bar{y}_i \in \mathcal{O}(Z_{\mathrm{rig}})$ so, daß

$$y_i - \bar{y}_i|_U \ \in \ \pi^{\lambda+2} C \ ,$$

und es ist insbesondere $\bar{y}_i|_U \in C$. Wegen $\varphi(U) \Subset_S V$ ist der schematische Abschluß von U_0 unter φ_0 in V_0 eigentlich über S_0. Nun ist V_0 affin über S_0. Daraus folgt, daß dieser schematische Abschluß endlich über S_0 ist. Also gibt es ein normiertes Polynom $F_i \in \mathcal{O}_S(S)[T]$ derart, daß $F_i(y_i) \in \pi C_0$. Insbesondere erhalten wir $F_i(\bar{y}_i|_U) \in \pi C_0$. Es sei $r \in \mathbb{N}$ so, daß $\pi^r F_i(\bar{y}_i) \in \mathcal{O}(Z)$. Nun betrachte man die Aufblasung $Z' \to Z$ von

$$\mathfrak{J} \ := \ (\pi^r F_i(\bar{y}_i), \ \pi^r)_{i=1,\ldots,N} \ ,$$

und es sei W' das offene Unterschema von Z', wo $\mathfrak{J}$ von π^r erzeugt wird. Nach Lemma 4.2.4(ii) gilt dann $U \Subset_Z W'$, denn $\pi^r F_i(\bar{y}_i|_U) \in \pi^{r+1} C$. Daher können wir Z durch W' ersetzen. Insbesondere ist dann $\|\bar{y}_i\|_{\sup} \le 1$, und nach Lemma 4.2.4(i) gibt es eine Aufblasung $Z' \to Z$, welche affin über U ist, derart, daß $\bar{y}_i$ auf Z' definiert ist. Daher können wir annehmen, daß die $\bar{y}_i$ auf Z definiert sind. Man betrachte die von ψ induzierte Abbildung

$$\overline{\psi} : Z \longrightarrow \mathbb{D}_S^N .$$

Es sei I das Ideal, welches V als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{D}_S^N$ definiert. Es gilt

$$\left(\overline{\psi}^* I\right) \mathcal{O}_U \subseteq \pi^{\lambda+2} \mathcal{O}_U ,$$

da $\overline{\psi}|_U$ mit ψ bis zum Level $\pi^{\lambda+2}$ übereinstimmt. Es sei nun $Z' \to Z$ die Aufblasung von

$$\mathfrak{J} := (\pi^{\lambda+1}, \overline{\psi}^* I)\mathcal{O}_Z ,$$

und es sei U' das offene Unterschema, wo $\mathfrak{J}$ von $\pi^{\lambda+1}$ erzeugt wird. Nach Lemma 4.2.4 (ii) ist insbesondere $U \Subset_Z U'$. Darüberhinaus ist U'_{rig} affinoid, d.h. wir können die Steinfaktorisierung

$$U' \longrightarrow T' = \mathrm{Spf}(\Gamma(U', \mathcal{O}_{Z'}))$$

betrachten. Nun faktorisiert $\overline{\psi}$ über die Steinfaktorisierung, also erhalten wir eine Abbildung

$$\tilde{\psi} : T' \longrightarrow \mathbb{D}_S^N .$$

Wegen $I \subseteq \pi^{\lambda+1}\mathcal{O}_{U'}$ gilt auch $I \subseteq \pi^{\lambda+1}\mathcal{O}_{T'}$. Also induziert $\tilde{\psi}$ einen Morphismus $T'_\lambda \to V_\lambda$. Nach Satz 4.2.2 läßt sich dieser zu einer Abbildung $T' \to V$ liften, die bis zum Level $\lambda_0 = \lambda - n_0$ übereinstimmt. Indem man diese mit $U' \to T'$ verkettet, erhalten wir den gesuchten Morphismus $\varphi' : U' \to V$.

Nun betrachten wir ein Modell $\psi : \tilde{U} \to \tilde{V}$. Wiederum dürfen wir annehmen, daß Bedingung (1) erfüllt ist. Ferner dürfen wir annehmen, daß $\tilde{V} \to V$ eine zulässige formelle Aufblasung ist, etwa die eines offenen Ideals J mit $\pi^{n-1} \in J$. Wir können $n \leq \lambda_0$ annehmen. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $\tau : \tilde{U} \to V$. Nach der vorherigen Behauptung gibt es eine Aufblasung $\tilde{Z}' \to \tilde{Z}$ und ein offenes Unterschema $\tilde{U}'$, welche den Behauptungen (a) und (b) genügen, sowie einen Morphismus $\tau' : \tilde{U}' \to V$ derart, daß τ' und τ auf $\tilde{U}_\lambda$ übereinstimmen. Wir können annehmen, daß $(\tau'^* J)\mathcal{O}_{\tilde{U}'}$ invertierbar ist. Daher erhalten wir eine Liftung $\psi' : \tilde{U}' \to \tilde{V}$ von τ'. Nun gilt

$$(\tau'^* I)|_{\tilde{U}} = (\tau^* I)|_{\tilde{U}} ,$$

da τ' und τ modulo π^{λ_0} übereinstimmen und π^n in J enthalten ist. Da $\tilde{V} \to V$ die Aufblasung von I ist, stimmen $\psi'|_{\tilde{U}}$ und ψ auf $\tilde{U}_{\lambda_0}$ überein. □

Es bleibt noch das im vorangehenden Beweis verwendete Lemma nachzureichen.

Lemma 4.2.4 *Es seien Z ein zulässiges formelles Schema und $U \subseteq Z$ ein offenes Unterschema.*

(i) Es sei $f \in \mathcal{O}(Z_{\mathrm{rig}})$ eine Funktion mit $\left\| f|_{U_{\mathrm{rig}}} \right\|_{\sup} \leq 1$. Dann gibt es eine zulässige formelle Aufblasung $Z' \to Z$ derart, daß $Z' \to Z$ affin über U ist und daß $f \in \mathcal{O}_{Z'}(Z' \times_Z U)$ gilt.

(ii) *Es seien* $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_Z$ *ein kohärentes Ideal und* $n \in \mathbb{N}$ *so, daß* $\mathfrak{a}|_U \subseteq \pi^{n+1}\mathcal{O}_U$ *. Es sei* $Z' \to Z$ *die Aufblasung von* $(\pi^n, \mathfrak{a})$ *, und* U' *sei das offene Unterschema von* Z' *, wo* $\mathfrak{a}$ *in* $\pi^n\mathcal{O}_{Z'}$ *enthalten ist. Dann ist* $U \Subset_Z U'$ *.*

(iii) *Es seien* $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_Z$ *ein kohärentes Ideal und* $n \in \mathbb{N}$ *so, daß* $(\pi^n) \subseteq \pi\mathfrak{a}$ *über* U *. Es sei* $Z' \to Z$ *die Aufblasung von* $(\pi^n, \mathfrak{a})$ *, und* U' *sei das offene Unterschema von* Z' *, wo* π^n *in* $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z'}$ *enthalten ist. Dann ist* $U \Subset_Z U'$ *.*

Beweis:

(i) Folgt aus [5], 4.5.

(ii) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt $x \in \overline{U_0} \setminus U'_0$. Dann gilt

$$\pi^n\mathcal{O}_{Z',x} \;\subseteq\; \mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z',x} \;.$$

Aus topologischen Gründen gibt es dann einen Punkt $z \in U_0$ derart, daß $\pi^n\mathcal{O}_{Z',z} \subseteq \mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z',z}$. Daher folgt

$$\pi^n\mathcal{O}_{Z',z} \;\subseteq\; \mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z',z} \;\subseteq\; \pi^{n+1}\mathcal{O}_{Z',z} \;.$$

Das ist jedoch unmöglich.

(iii) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt $x \in \overline{(Z' \times_Z U)_0} \setminus U'_0$. Dann folgt

$$\mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z',x} \;\subseteq\; \pi^n\mathcal{O}_{Z',x} \;.$$

Dann gilt $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z'} \;\subseteq\; \pi^n\mathcal{O}_{Z'}$ auch in einer Umgebung von x , und es gibt folglich einen Punkt $z \in (Z' \times_Z U)_0$ so, daß $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z',z} \subseteq \pi^n\mathcal{O}_{Z',z}$. Daher folgt

$$\pi^n\mathcal{O}_{Z',z} \;\subseteq\; \pi\mathfrak{a}\mathcal{O}_{Z',z} \;\subseteq\; \pi^{n+1}\mathcal{O}_{Z',z} \;.$$

Das ist jedoch unmöglich. □

Kapitel 5

Rigid-analytische Versionen des Glättungssatzes und des Approximationssatzes

5.1 Der Glättungssatz

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, die rigid-analytische Version des Artinschen Glättungssatzes zu beweisen. Wir erinnern an die Definition des Polyzylinders

$$\mathbb{D}_K^n(c) \;=\; \operatorname{Sp} K\langle c_1^{-1}\zeta_1, \ldots, c_n^{-1}\zeta_n\rangle$$

für Radien $c_1, \ldots, c_n \in (K^a)^\times$. Es seien speziell $|c_i| > 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\hat{S} \;:=\; \mathbb{D}_K^n(1) \;\Subset\; S \;:=\; \mathbb{D}_K^n(c)\;.$$

Wir wollen zeigen, daß zu jedem affinoiden S-Raum und zu jedem Schnitt $\hat{S} \to X$, dessen Bild relativ S-kompakt in X liegt, ein Schnitt $\hat{S} \to X^g$ in einen rig-glatten Raum X^g über S konstruiert werden kann, der den gegebenen Schnitt fortsetzt.

Satz 5.1.1 (Glättungssatz) *Es seien K ein vollständiger nicht-archimedisch bewerteter Körper, und $c_1, \ldots, c_n$, S und $\hat{S}$ seien wie oben definiert. Es seien ferner X ein affinoider S-Raum und σ ein $\hat{S}$-wertiger Punkt von X derart, daß $\sigma(\hat{S}) \Subset_S X$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm affinoider Räume*

$$\begin{tikzcd}
X^g \arrow[d, dashed] & \\
X \arrow[d] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ul, dashed, "\sigma^g"'] \arrow[dl] \\
S &
\end{tikzcd}$$

derart, daß $X^g \to S$ rig-glatt ist und daß $\sigma^g(\hat{S}) \Subset_S X^g$ gilt.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung des Artinschen Glättungssatzes durch Induktion nach n. Im Falle $n = 0$ setze man $X^g := \hat{S} = S$. Es sei nun $n \geq 1$. Wir können annehmen, daß

$$X = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{D}_S^N = \operatorname{Sp} \mathcal{O}_S(S)\langle Y_1, \dots, Y_N \rangle$$

für gewisse $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_S(S)\langle Y_1, \dots, Y_N \rangle$, und daß $\sigma(\hat{S}) \subseteq \mathbb{D}_S^N(\varepsilon)$ für gewisse $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N < 1$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

In einem ersten Schritt wollen wir unter der Verwendung der Induktionshypothese eine Zwischenbehauptung beweisen.

Behauptung *Es sei* $f_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_S^N)$ *beliebig mit* $|\sigma^* f_0| = 1$. *Dann gibt es ein kommutatives Diagramm der Art*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & & \\
\mathbb{D}_S^N \arrow[d] & X \arrow[l, hook'] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ull, dashed, "\psi"'] \arrow[dll] \\
S & &
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

so, daß

- $\alpha^* f_0$ *teilt* $\alpha^* f_i$ *für* $i = 1, \dots r$,
- $U \to S$ *ist rig-glatt,*
- $\psi(\hat{S}) \Subset_S U$.

Beweis der Zwischenbehauptung: Zunächst gibt es nämlich einen Automorphismus $\pi : \hat{S} \to \hat{S}$ vom Typ $\zeta_n \mapsto \zeta_n$, $\zeta_i \mapsto \zeta_i + \zeta_n^{b_i}$ für $i = 1, \dots, n-1$ so, daß $\pi^* \sigma^* f_0$ ein Weierstraßdivisor in der Variablen ζ_n vom Grade d ist. Ersetzt man dabei S durch einen geeigneten Polyzylinder D mit $\hat{S} \Subset D \subseteq S$, so kann erreichen, daß diese Transformation S invariant läßt. Wir wollen dies kurz ausführen.

Wir definieren $d_1, \dots, d_n \in (K^a)^\times$ so, daß

$$\begin{aligned}
|d_i| &= |c_i| \text{ für } i = 1, \dots, n-1 , \\
|d_n| &= \min \left\{ |c_1|^{1/b_1}, \dots, |c_{n-1}|^{1/b_{n-1}}, \ |c_n| \right\} .
\end{aligned}$$

Ist eines der $b_i = 0$, so sei der entsprechende Term $|c_i|^{1/b_i}$ zu streichen. Diese Definition ist so gewählt, daß

$$|d_n|^{b_i} \leq |c_i| \text{ für } i = 1, \dots, n-1 . \tag{5.2}$$

Mit $d := (d_1, \dots, d_n)$ folgt dann also, daß

$$\hat{S} \Subset D := \mathbb{D}_K^n(d) \subseteq S .$$

Nun läßt sich $\pi : \hat{S} \xrightarrow{\sim} \hat{S}$ zu einem Automorphismus $D \xrightarrow{\sim} D$ fortsetzen. Denn einerseits folgt aus

$$|\zeta_i| \ \leq |d_i| \ \text{ für } i = 1, \dots, n$$

mit Ungleichung (5.2) sofort

$$|\zeta_i + \zeta_n^{b_i}| \ \leq \ \max\left\{|\zeta_i|, \ |\zeta_n|^{b_i}\right\} \ \leq \ \max\left\{|d_i|, \ |d_n|^{b_i}\right\} \ = \ |d_i|$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Und andererseits folgt aus

$$|\zeta_i + \zeta_n^{b_i}| \ \leq |d_i| \ \text{ für } i = 1, \dots, n-1, \ \ |\zeta_n| \ \leq \ |d_n|$$

mit Ungleichung (5.2) sogleich

$$|\zeta_i| \ \leq \ \max\left\{|\zeta_i + \zeta_n^{b_i}|, \ |\zeta_n|^{b_i}\right\} \ \leq \ \max\left\{|d_i|, \ |d_n|^{b_i}\right\} \ = \ |d_i|$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Also können wir S durch $D \subseteq S$ ersetzen, und anschließend die Transformation π berücksichtigen. Wir verwenden von nun an wieder die ursprüngliche Bezeichnung, d.h. $S = \mathbb{D}_K^n(c)$.

Man setze

$$\begin{aligned} S' \ &:= \ \mathbb{D}_K^{n-1}(c') \quad \text{in den Koordinaten } \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1} \ , \\ \hat{S}' \ &:= \ \mathbb{D}_K^{n-1}(1) \quad \text{in den Koordinaten } \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1} \ , \end{aligned}$$

wobei $c_i' := c_i$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $c' := (c_1', \dots, c_{n-1}')$ sei. Es folgt nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz

$$\sigma^* f_0 \ = \ \hat{u} \cdot \hat{p} \ , \tag{5.3}$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{p} \ = \ \zeta_n^d + a_{d-1}'\zeta_n^{d-1} + \ldots + a_0' \in \mathcal{O}(\hat{S}')[\zeta_n] \ , \\ |a_\delta'| \leq 1 \text{ für } \delta = 0, \dots, d-1 \ , \\ \hat{u} \in (\mathcal{O}(\hat{S}))^\times \ . \end{aligned}$$

Wir führen nun neue Variablen $Y_{\nu\delta}$, A_δ, Z_ν für $\delta = 0, \dots, d-1$ und $\nu = 1, \dots, N$ ein und definieren $\tilde{c}$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_S^{N'}(\tilde{c}) \ := \ \operatorname{Sp} K\langle \ \ & c_\mu^{-1}\zeta_\mu, \ c_n^{-1}\zeta_n, c_n^\delta Y_{\nu\delta}, \ c_n^{-(d-\delta)}A_\delta, \ c_n^d Z_\nu \ ; \\ & \mu = 1, \dots, n-1, \ \nu = 1, \dots, N, \ \delta = 0, \dots, d-1\rangle \ , \end{aligned}$$

wobei

$$N' \ := \ dN + d + N \ .$$

Auf dem Raum $\mathbb{D}_S^{N'}(\tilde{c})$ gelten also die Ungleichungen

$$|Y_{\nu\delta}| \ \leq \ |c_n|^{-\delta} \ , \ \ |A_\delta| \ \leq \ |c_n|^{d-\delta} \ , \ \ |Z_\nu| \ \leq \ |c_n|^{-d} \ .$$

Das Polynom

$$p \ := \ \zeta_n^d + A_{d-1}\zeta_n^{d-1} + \ldots + A_0$$

ist ein Weierstraßpolynom in ζ_n auf dem Polyzylinder, der durch $|\zeta_n| \leq 1$ und $|A_\delta| \leq 1$ definiert ist. Darüberhinaus ist p ein Weierstraßdivisor in ζ_n auf der Menge, die durch $|\zeta_n| \leq |c_n|$ und $|A_\delta| \leq |c_n|^{d-\delta}$ definiert ist. Dies wird von Bedeutung sein, wenn wir $\psi(\hat{S}) \Subset_S U$ zeigen wollen.

Die Wahl der Radien ermöglicht die Abbildung

$$\tau : \mathbb{D}_S^{N'}(\tilde{c}) \longrightarrow \mathbb{D}_S^N \ ,$$

die durch

$$\tau^* Y_\nu \ := \ \sum_{\delta=0}^{d-1} Y_{\nu\delta}\zeta_n^\delta + Z_\nu \cdot p$$

für $\nu = 1, \ldots, N$ definiert ist. Mit der Weierstraßdivision erhalten wir

$$\tau^* f_i \ = \ \sum_{\delta=0}^{d-1} f_{i\delta}\zeta_n^\delta + q_i \cdot p \tag{5.4}$$

für $i = 0, \ldots, r$, wobei nach der Definition von τ^* die $f_{i\delta}$ nicht von $\zeta_n, Z_1, \ldots, Z_N$ abhängen. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{i\delta} \ \in \ K\langle \ \ & c_\mu^{-1}\zeta_\mu,\ c_n^\delta Y_{\nu\delta},\ c_n^{-(d-\delta)} A_\delta \ ; \\ & \mu = 1, \ldots, n-1,\ \nu = 1, \ldots, N,\ \delta = 0, \ldots, d-1\rangle \ . \end{aligned}$$

Nun setze man

$$V \ := \ V(f_{i\delta}) \ \subseteq \ \underbrace{\mathbb{D}_S^{dN+N}(c_n^{-\delta}, c_n^{-d})}_{\substack{\text{in Koordinaten } Y_{\nu\delta}, Z_\nu, \\ \nu=1,\ldots,N,\ \delta=0,\ldots,d-1}} \times_K \underbrace{\mathbb{D}_K^d(c_n^{d-\delta})}_{\substack{\text{in Koordinaten } A_\delta, \\ \delta=0,\ldots,d-1}} \ = \ \mathbb{D}_S^{N'}(\tilde{c})$$

$$V' \ := \ V(f_{i\delta}) \ \subseteq \ \underbrace{\mathbb{D}_{S'}^{dN}(c_n^{-\delta})}_{\substack{\text{in Koordinaten } Y_{\nu\delta}, \\ \nu=1,\ldots,N,\ \delta=0,\ldots,d-1}} \times_K \underbrace{\mathbb{D}_K^d(c_n^{d-\delta})}_{\substack{\text{in Koordinaten } A_\delta, \\ \delta=0,\ldots,d-1}} \ .$$

Es gilt also

$$V \ = \ \mathbb{D}_{V'}^{1+N}(c_n, c_n^{-d}) \text{ in Koordinaten } \zeta_n, Z_\nu,\ \nu = 1, \ldots, N \ .$$

Wir wollen nun einen Schnitt definieren

$$\varphi' : \hat{S}' \longrightarrow \mathbb{D}_{S'}^{dN}(c_n^{-\delta}) \times_K \mathbb{D}_K^d(c_n^{d-\delta})$$

durch

$$\begin{aligned} (\varphi')^* Y_{\nu\delta} \ &:= \ y'_{\nu\delta} \ , \\ (\varphi')^* A_\delta \ &:= \ a'_\delta \ , \end{aligned}$$

wobei die $y'_{\nu\delta} \in K\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\rangle$ durch die Weierstraßdivision

$$\sigma^* Y_\nu \ = \ \sum_{\delta=0}^{d-1} y'_{\nu\delta}\zeta_n^\delta + \hat{z}_\nu \cdot \hat{p}$$

definiert sind. Die Wohldefiniertheit des Schnittes muß noch geklärt werden.

Wegen $\sigma(\hat{S}) \subseteq \mathbb{D}_S^N(\varepsilon)$ gilt $|\sigma^* Y_\nu| < 1$ für $\nu = 1, \dots, N$, und daher $|y'_{\nu\delta}| < 1$ und $|\hat{z}_\nu| < 1$ für $\nu = 1, \dots, N$ und $\delta = 0, \dots, d-1$. Wegen $|c_n| > 1$ kann man nach eventueller Verminderung von c_n, aber unter Beibehaltung der Ungleichung $|c_n| > 1$, annehmen, daß

$$\begin{aligned} |y'_{\nu\delta}| \;&<\; c_n^{-\delta} \;<\; 1\,, \quad \nu = 1, \dots, N,\ \delta = 0, \dots, d-1\,, \\ |\hat{z}_\nu| \;&<\; c_n^{-d} \;<\; 1\,, \quad \nu = 1, \dots, N\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Mit dieser Anpassung ist der Schnitt φ' wohldefiniert.

In analoger Weise definiert man $\varphi : \hat{S} \to \mathbb{D}_S^{N'}(\tilde{c})$, indem man zusätzlich noch $\varphi^* Z_\nu = \hat{z}_\nu$ setzt. Es gilt dann $\sigma = \tau \circ \varphi$.

Wir wollen noch zeigen, daß φ' über V' faktorisiert und daß φ über V faktorisiert. Wir beachten dazu, daß aus (5.4) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma^* f_i \;=\; \varphi^* \tau^* f_i \;&=\; \sum_{\delta=0}^{d-1} \varphi^* f_{i\delta} \cdot \zeta_n^\delta + \varphi^* q_i \cdot \hat{p} \\ &=\; \sum_{\delta=0}^{d-1} \varphi'^* f_{i\delta} \cdot \zeta_n^\delta + \varphi^* q_i \cdot \hat{p} \end{aligned}$$

für $i = 0, \dots, r$ folgen. Dies ist eine Weierstraßdivision von $\sigma^* f_i$ durch $\hat{p}$. Andererseits ist $\sigma^* f_i = 0$ für $i = 1, \dots, r$, und mit (5.3) gilt somit $\sigma^* f_i \equiv 0 \bmod \hat{p}$ für $i = 0, \dots, r$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Weierstraßdivision folgt also

$$\varphi^* f_{i\delta} \;=\; \varphi'^* f_{i\delta} \;=\; 0$$

für $i = 0, \dots, r$ und $\delta = 0, \dots, d-1$. Daraus folgen die Faktorisierungen von φ und φ'. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die induzierten Abbildung $\hat{S} \to V$ bzw. $\hat{S}' \to V'$ wieder mit φ bzw. φ'.

Wegen $|a'_\delta| \le 1$ gilt

$$|a'_\delta| \;<\; c_n^{d-\delta}\;,\ \delta = 0, \dots, d-1\;.$$

Zusammen mit den Ungleichungen (5.5) folgt daraus $\varphi'(\hat{S}') \Subset_{S'} V'$. Wir können somit die Induktionshypothese anwenden und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V')^g \arrow[d] & \\
V' \arrow[d] & \hat{S}' \arrow[l, "\varphi'"'] \arrow[ul, "\psi'"'] \arrow[dl] \\
S' &
\end{tikzcd}$$

wobei $(V')^g$ rig-glatt über S' ist und $\psi'(\hat{S}') \Subset_{S'} (V')^g$ gilt. Dann setzen wir

$$U \;:=\; \mathbb{D}^{1+N}_{(V')^g}(c_n, c_n^{-d}) \;\text{ in den Koordinaten } \zeta_n, Z_\nu,\; \nu = 1, \ldots, N$$

und definieren

$$\psi : \hat{S} \to U$$

durch

$$\psi^* Z_\nu \;:=\; \hat{z}_\nu \;,\; \nu = 1, \ldots, N$$

als Morphismus über ψ'. Es gilt $\psi(\hat{S}) \Subset_S U$ wegen $|\hat{z}_\nu| < |c_n|^{-d}$ für $\nu = 1, \ldots, N$.

Die Abbildung $(V')^g \to V'$ induziert die Abbildung

$$U \;=\; \mathbb{D}^{1+N}_{(V')^g}(c_n, c_n^{-\delta}) \;\longrightarrow\; V \;=\; \mathbb{D}^{1+N}_{V'}(c_n, c_n^{-\delta})\;.$$

Insgesamt bekommen wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^N_S \arrow[dd] & \mathbb{D}^{N'}_S(\tilde{c}) \arrow[l, "\tau"'] & V \arrow[l, hook'] & U \arrow[l] \\
 & X \arrow[ul, hook'] & & \\
S & & & \hat{S} \arrow[lll] \arrow[ull, "\sigma"] \arrow[uul, "\varphi"] \arrow[uu, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Es sei nun $\alpha : U \to \mathbb{D}^N_S$ die durch die obere Zeile des Diagramms definierte Abbildung. Wir wollen noch zeigen, daß α die geforderten Teilbarkeitsbedingungen der Zwischenbehauptung erfüllt.

Wegen $\sigma = \tau \circ \varphi$ gilt

$$\hat{u} \cdot \hat{p} \;=\; \sigma^* f_0 \;=\; (\varphi^* q_0) \cdot \hat{p}\;,$$

und daher ist $\hat{u} = \varphi^* q_0$ eine Einheit in $\mathcal{O}(\hat{S})$. Somit ist q_0 eine Einheit in $\mathcal{O}_V$ in einer Umgebung von $\varphi(\hat{S})$. Ferner ist $\tau^* f_i = q_i \cdot p$ in $\mathcal{O}_V$ für $i = 1, \ldots, r$, und wir schließen, daß $\tau^* f_0 = q_0 \cdot p$ in $\mathcal{O}_V$ ein Teiler von $\tau^* f_i = q_i \cdot p$ in einer Umgebung von $\varphi(\hat{S})$ ist . Diese Teilbarkeit setzt sich fort, wenn man $\alpha^* f_0$ und $\alpha^* f_i$ in einer Umgebung von $\psi(\hat{S})$ betrachtet. Dann kann man U durch diese Umgebung ersetzen, und die Zwischenbehauptung ist bewiesen.

Wir können nun X durch den schematischen Abschluß von $\sigma(\hat{S})$ ersetzen. Dann ist X irreduzibel und reduziert. Da $\hat{S} \to S$ glatt ist, ist der schematische Abschluß X geometrisch reduziert. Daher ist X generisch glatt über K, und $\sigma(\hat{S})$ ist nicht im singulären Ort enthalten. Da es einen Schnitt σ über $\hat{S}$ gibt, ist die Abbildung $X \to S$ generisch glatt, etwa von der relativen Dimension $N - m$ für ein m; siehe [14], 4.4 & 4.11. Also können wir annehmen, daß

$$\Delta \;:=\; \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

nicht überall verschwindet, und daß $X = V(f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots f_r)$ dicht in

$$\overline{X} \;:=\; V(f_1, \dots, f_m)$$

liegt. Wir wollen noch begründen, warum man $\overline{X} = X$ und $m = r$ annehmen kann. Es sei dazu angenommen, die Behauptung des Satzes wäre für $\overline{X}$ anstelle von X gezeigt, d.h. es gäbe ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X^g \arrow[d, "\vartheta"'] & & \\
\overline{X} \arrow[d] & X \arrow[l, hook'] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ull] \arrow[dll] \\
S & &
\end{tikzcd}$$

mit $X^g \to S$ glatt. Nun gibt es eine offene dichte Teilmenge $U \subseteq \overline{X}$ derart, daß

$$f_i|_U \;=\; 0$$

für $i = m+1, \dots, r$. Dann folgt auch

$$\vartheta^* f_i|_{\vartheta^{-1}(U)} \;=\; 0$$

für $i = m+1, \dots, r$, und $\vartheta^{-1}(U)$ ist ebenfalls offen und dicht in X^g. Nun ist X^g glatt über K, also irreduzibel und reduziert. Daraus folgt

$$\vartheta^* f_i \;=\; 0$$

für $i = m+1, \dots, r$, und $X^g \to \overline{X}$ faktorisiert folglich über X.

Damit haben wir gezeigt, daß man $\overline{X} = X$ und $m = r$ annehmen können. Nach eventueller Normierung von f_1 gilt

$$|\sigma^* \Delta^2| \;=\; 1\,.$$

Wir können daher die schon gezeigte Zwischenbehauptung auf $f_0 := \Delta^2$ anwenden und erhalten somit ein Diagramm der Form (5.1) mit den dort behaupteten Eigenschaften.

Wir wollen den Induktionsschritt beweisen, indem wir ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\alpha"'] & X^g \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \\
\mathbb{D}_S^N \arrow[d] & X \arrow[l, hook'] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ul, dashed, "\sigma^g"'] \arrow[ull] \arrow[dll] \\
S & &
\end{tikzcd}$$

konstruieren, welches abgesehen vom linken oberen Quadrat kommutativ ist .

Wir verwenden von nun an Vektorschreibweise und setzen also

$$\mathrm{f} \;:=\; (f_1, \ldots, f_r)^{\mathrm{t}} \,.$$

Die Teilbarkeitsaussage in der Zwischenbehauptung für $f_0 = \Delta^2$ bedeutet, daß es einen Vektor $\mathrm{a}' = (a_1', \ldots, a_r')^{\mathrm{t}}$ gibt, dessen Komponenten in $\mathcal{O}_U(U)$ liegen, mit

$$\alpha^* \mathrm{f} \;=\; \alpha^* \Delta^2 \cdot \mathrm{a}' \,. \tag{5.6}$$

Die $r \times r$-Minoren der Matrix

$$J \;:=\; \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_\nu} \right)_{i=1,\ldots,r,\; \nu=1,\ldots,N}$$

bezeichnen wir mit $\Delta_1 := \Delta$, $\Delta_2, \ldots, \Delta_l$ für $l := \binom{N}{r}$. Nach der Cramerschen Regel gibt es zu jeder $r \times r$-Untermatrix von J eine adjungierte Matrix so, daß deren beider Produkt das Δ_λ-fache der Einheitsmatrix E_r ergibt. Indem wir eventuell mit Nullspalten auffüllen, erhalten wir $N \times r$-Matrizen M_λ derart, daß

$$J \cdot M_\lambda \;=\; \Delta_\lambda \cdot \mathrm{E}_r \tag{5.7}$$

für $\lambda = 1, \ldots, l$. Unser Ziel ist es, X^g als Untervarietät von $\mathbb{D}_U^{lN}$ zu realisieren. Es sei $p : \mathbb{D}_U^{lN} \to U$ die Projektion, und wir definieren β durch das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{D}_U^{lN} \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "\beta"] \\ \mathbb{D}_S^N & \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen die Koordinaten von $\mathbb{D}_U^{lN}$ über U mit $Z_{\lambda\nu}$ für $\lambda = 1, \ldots, l$ und $\nu = 1, \ldots, N$. Ein S-Morphismus $\varrho : \mathbb{D}_U^{lN} \to \mathbb{D}_S^N$ sei definiert durch

$$\varrho^* Y_\nu \;:=\; \sum_{\lambda=1}^{l} \beta^* \Delta_\lambda \cdot Z_{\lambda\nu} + \beta^* Y_\nu$$

für $\nu = 1, \ldots, N$. Wir setzen nun abkürzend

$$\begin{aligned} a_\nu \;&:=\; \beta^* Y_\nu \\ \mathrm{a} \;&:=\; (a_1, \ldots, a_N)^{\mathrm{t}} \\ b_\nu \;&:=\; \sum_{\lambda=1}^{l} \beta^* \Delta_\lambda \cdot Z_{\lambda\nu} \qquad (5.8) \\ \mathrm{Z}_{(\lambda)} \;&:=\; (Z_{\lambda 1}, \ldots, Z_{\lambda N})^{\mathrm{t}} \\ \mathrm{b} \;&:=\; (b_1, \ldots, b_N)^{\mathrm{t}} \;=\; \sum_{\lambda=1}^{l} \beta^* \Delta_\lambda \cdot \mathrm{Z}_{(\lambda)} \,. \qquad (5.9) \end{aligned}$$

Wir können die Definition von ϱ^* dann in der Form

$$\varrho^* Y \;=\; \mathrm{a} + \mathrm{b}$$

schreiben. Durch Taylorentwicklung folgt

$$\begin{aligned}\varrho^* f_i \;=\; f_i(\mathrm{a}+\mathrm{b}) &\;=\; f_i(\mathrm{a}) + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial Y_\nu}(\mathrm{a}) b_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} c_{\nu\mu}^{(i)} b_\nu b_\mu \\ &\;=\; \beta^* f_i + \sum_{\nu=1}^{N} \beta^* \frac{\partial f_i}{\partial Y_\nu} \cdot b_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} c_{\nu\mu}^{(i)} b_\nu b_\mu\end{aligned}$$

mit gewissen globalen Schnitten $c_{\nu\mu}^{(i)}$ von $\mathbb{D}_U^{lN}$ für $i = 1, \ldots, r$. Aus dieser Gleichung ergibt sich mit der Vektorschreibweise $\mathrm{c}_{\nu\mu} := (c_{\nu\mu}^{(1)}, \ldots, c_{\nu\mu}^{(r)})^{\mathrm{t}}$ und durch Einsetzen von (5.8) und (5.9)

$$\begin{aligned}\varrho^* \mathrm{f} &\;=\; \beta^* \mathrm{f} + \beta^* J \cdot \mathrm{b} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \mathrm{c}_{\nu\mu} b_\nu b_\mu \\ &\;=\; \beta^* \mathrm{f} + \sum_{\lambda=1}^{l} \beta^* \Delta_\lambda \cdot \beta^* J \cdot \mathrm{Z}_{(\lambda)} \qquad (5.10) \\ &\qquad + \sum_{\lambda,\gamma=1}^{l} \beta^* \Delta_\lambda \cdot \beta^* \Delta_\gamma \underbrace{\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \mathrm{c}_{\nu\mu} Z_{\lambda\nu} Z_{\gamma\mu}}_{=:\mathrm{q}_{\lambda\gamma}} .\end{aligned}$$

Weiter folgt aus Gleichung (5.6)

$$\begin{aligned}\beta^* \mathrm{f} &\;=\; p^* \alpha^* \mathrm{f} \;=\; p^*(\alpha^* \Delta \cdot \alpha^* \Delta) \cdot p^* \mathrm{a}' \\ &\;=\; \beta^* \Delta \cdot (\beta^* \Delta \cdot \mathrm{E}_r) \cdot p^* \mathrm{a}' .\end{aligned}$$

Aus Gleichung (5.7), angewandt mit $\lambda = 1$, ergibt sich daraus

$$\beta^* \mathrm{f} \;=\; \beta^* \Delta \cdot \beta^* J \cdot \beta^* M_1 \cdot p^* \mathrm{a}' . \qquad (5.11)$$

Aus Gleichung (5.7) folgt außerdem

$$\sum_{\gamma=1}^{l} \beta^* \Delta_\gamma \cdot \mathrm{q}_{\lambda\gamma} \;=\; \beta^* J \cdot \sum_{\gamma=1}^{l} \beta^* M_\gamma \cdot \mathrm{q}_{\lambda\gamma} \qquad (5.12)$$

für $\lambda = 1, \ldots, l$. Man setze nun abkürzend

$$\begin{aligned}\mathrm{a}'_{(1)} &\;:=\; \beta^* M_1 \cdot p^* \mathrm{a}' \\ \mathrm{a}'_{(\lambda)} &\;:=\; 0 \;\text{ für } \lambda = 2, \ldots, l \\ \mathrm{q}_{(\lambda)} &\;:=\; \sum_{\gamma=1}^{l} \beta^* M_\gamma \cdot \mathrm{q}_{\lambda\gamma} .\end{aligned}$$

Die Gleichungen (5.11) und (5.12) lauten somit

$$\begin{aligned} \beta^*\mathrm{f} \quad &= \quad \beta^*\Delta \cdot \beta^* J \cdot \mathrm{a}'_{(1)} \\ \sum_{\gamma=1}^{l} \beta^*\Delta_\gamma \cdot \mathrm{q}_{\lambda\gamma} \quad &= \quad \beta^* J \cdot \mathrm{q}_{(\lambda)} \; . \end{aligned}$$

Setzt man dies in (5.10) ein, so erhält man

$$\varrho^*\mathrm{f} \; = \; \sum_{\lambda=1}^{l} \beta^*\Delta_\lambda \cdot \beta^* J \cdot \left(\mathrm{a}'_{(\lambda)} + \mathrm{Z}_{(\lambda)} + \mathrm{q}_{(\lambda)} \right) \; .$$

Es sei

$$X^g \; := \; V(\mathrm{a}'_{(\lambda)} + \mathrm{Z}_{(\lambda)} + \mathrm{q}_{(\lambda)} \; ; \; \lambda = 1, \ldots l) \; \subseteq \; \mathbb{D}_U^{lN}$$

die abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{D}_U^{lN}$, die durch die Komponenten der Vektoren

$$\mathrm{a}'_{(\lambda)} + \mathrm{Z}_{(\lambda)} + \mathrm{q}_{(\lambda)} \;\; \text{für } \lambda = 1, \ldots, l \tag{5.13}$$

definiert ist. Da nach Konstruktion die Bilder der $\varrho^* f_i$ in $\mathcal{O}_{X^g}(X^g)$ verschwinden, faktorisiert die Abbildung $X^g \hookrightarrow \mathbb{D}_U^{lN} \xrightarrow{\varrho} \mathbb{D}_S^N$ über X. Damit haben wir ein Diagramm von S-Morphismen

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{D}_U^{lN} \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "\varrho"] & X^g \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \\
\mathbb{D}_S^N \arrow[d] & & X \arrow[ll, hook'] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[lllu, "\psi"'] \arrow[llld] \\
S & & &
\end{tikzcd}$$

konstruiert, welches abgesehen vom linken oberen Quadrat und vom linken oberen Dreieck kommutativ ist.

Wir wollen nun mit Hilfe von ψ und des Nullschnitts

$$\tau : U \to \mathbb{D}_U^{lN}$$

eine Abbildung $\sigma^g : \hat{S} \to X^g$ konstruieren, die die Behauptung erfüllt.

Mit (5.6) folgt

$$0 \; = \; \sigma^*\mathrm{f} \; = \; \psi^*\alpha^*\mathrm{f} \; = \; \sigma^*\Delta^2 \cdot \psi^*\mathrm{a}' \; ,$$

und da $\sigma^*\Delta^2$ nicht überall verschwindet, folgt somit

$$\psi^*\mathrm{a}' \; = \; 0 \; .$$

Nach Definition des Nullschnittes $\tau : U \to \mathbb{D}_U^{lN}$ gilt $p \circ \tau = \mathrm{id}_U$. Wegen $\beta = \alpha \circ p$ folgt dann $\beta \circ \tau = \alpha$. Die Definition von $\mathrm{a}'_{(1)}$ liefert

$$\psi^* \tau^* \mathrm{a}'_{(1)} \;=\; \psi^* \tau^* (\beta^* M_1 \cdot p^* \mathrm{a}') \;=\; \sigma^* M_1 \cdot \psi^* \mathrm{a}' \;=\; 0\,.$$

Wegen $a'_{(\lambda)} = 0$ für $\lambda \geq 2$ und $\tau^* \mathrm{Z}_{(\lambda)} = \tau^* \mathrm{q}_{(\lambda)} = 0$ für $\lambda = 1, \ldots, l$ faktorisiert $\tau \circ \psi : \hat{S} \to \mathbb{D}_U^{lN}$ über X^g, d.h. es gibt einen Morphismus $\sigma^g : \hat{S} \to X^g$, welcher auf $\mathbb{D}_U^{lN}$ mit $\tau \circ \psi$ übereinstimmt. Das Diagramm sieht nun wie folgt aus.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend left, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{D}_U^{lN} \arrow[l, "p"'] \arrow[dl, "\varrho"] & X^g \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \\
\mathbb{D}_S^N \arrow[d] & & X \arrow[ll, hook'] & \hat{S} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[ul, "\sigma^g"'] \arrow[ulll, "\psi"] \arrow[dlll] \\
S & & &
\end{tikzcd}$$

Als nächstes ist zu zeigen, daß das rechte obere Dreieck kommutiert.

Aus der Definition von ϱ folgt die Identität $\alpha = \varrho \circ \tau$. Es gilt damit folgende Gleichungskette von Abbildungen.

$$\begin{aligned}
\hat{S} \xrightarrow{\sigma} X^g \to X \hookrightarrow \mathbb{D}_S^N \;&=\; \hat{S} \xrightarrow{\sigma^g} X^g \hookrightarrow \mathbb{D}_U^{lN} \xrightarrow{\varrho} \mathbb{D}_S^N \\
&=\; \hat{S} \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\tau} \mathbb{D}_U^{lN} \xrightarrow{\varrho} \mathbb{D}_S^N \\
&=\; \hat{S} \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\alpha} \mathbb{D}_S^N \\
&=\; \hat{S} \xrightarrow{\sigma} X \hookrightarrow \mathbb{D}_S^N\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die gewünschte Kommutativität.

Wir wollen nun die Rig-Glattheit von $X^g \to S$ nach eventueller Verkleinerung von X^g zeigen. Dazu zeigen wir mit dem Jacobi-Kriterium, daß $X^g \to U$ rig-étale entlang des Nullschnitts τ ist, d.h. in jedem Punkt $z \in \tau(U) \cap X^g$. Es seien $h_{\lambda\nu}$ die Koeffizienten der Vektoren in (5.13). Wir müssen zeigen, daß die Differentiale $d(h_{\lambda\nu})(z)$, $\lambda = 1, \ldots, l$, $\nu = 1, \ldots, N$, linear unabhängig in $\Omega^1_{\mathbb{D}_U^{lN}/U,z} \otimes k(z)$ sind. Nun ist aber $\mathrm{a}'_{(1)}$ ein Vielfaches von $p^* \mathrm{a}'$, und es folgt

$$d(\mathrm{a}'_{(1)}) \;=\; 0\,.$$

Ferner ist $Z_{\lambda\nu}(z) = 0$ nach der Wahl von z. Da die $q_{\lambda\nu}$ Potenzreihen der Ordnung ≥ 2 in den $Z_{\lambda\nu}$ sind, folgt $d(q_{\lambda\nu})(z) = 0$. Insgesamt folgt

$$d(h_{\lambda\nu})(z) \;=\; d(Z_{\lambda\nu}) \otimes 1$$

für $\lambda = 1, \ldots, l$ und $\nu = 1, \ldots, N$, und diese bilden eine Basis von $\Omega^1_{\mathbb{D}_U^{lN}/U,z} \otimes k(z)$. Der rig-étale Ort von X^g über U enthält also $\sigma^g(\hat{S})$. Daher können wir X^g durch diesen rig-étalen Ort ersetzen, und es folgt $X^g \to U$ rig-étale. Da $U \to S$ bereits als rig-glatt bekannt war, folgt daraus die Rig-Glattheit von $X^g \to S$.

Wir wollen schließlich noch zeigen, daß $\sigma^g(\hat{S}) \Subset_S X^g$ gilt. Die Ersetzung von X^g durch den rig-étalen Ort bedeutet, daß X^g nun eine lokal-abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{D}_U^{lN}$ der Form

$$X^g \;=\; W \setminus \tilde{W}$$

ist, wobei $W, \tilde{W}$ abgeschlossene Untervarietäten von $\mathbb{D}_U^{lN}$ sind, und es gilt

$$\tilde{W} \cap \tau(\psi(\hat{S})) \;=\; \emptyset\,.$$

Nach der Zwischenbehauptung gilt $\psi(\hat{S}) \Subset_S U$. Nach Korollar 3.7.5 folgt daraus

$$\tau(\psi(\hat{S})) \;\Subset_S\; \mathbb{D}_U^{lN}\,.$$

Da W eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{D}_U^{lN}$ ist, folgt nach Lemma 2.6.2

$$\tau(\psi(\hat{S})) \cap W \;\Subset_S\; W\,.$$

Wegen $\tilde{W} \cap \tau(\psi(\hat{S})) = \emptyset$ folgt daraus

$$\sigma^g(\hat{S}) \;=\; \tau(\psi(\hat{S})) \cap X^g \;\Subset_S X^g\,.$$

□

5.2 Der Approximationssatz

Satz 5.2.1 (Approximationssatz) *Es sei K ein Körper, der vollständig bezüglich einer nicht-archimedischen Bewertung sei. Es sei S ein affinoider K-Raum. Es sei $\hat{S}$ ein Weierstraßbereich in S so, daß $\hat{S} \Subset S$. Es sei X ein affinoider S-Raum und $\lambda \in \mathbb{N}$. Es sei σ ein $\hat{S}$-wertiger Punkt von X so, daß $\sigma(\hat{S}) \Subset_S X$. Dann gibt es einen offenen Teilbereich S' von S und einen S'-wertigen Punkt $\sigma' : S' \to X$ derart, daß*

(i) $\hat{S} \Subset S'$.

(ii) $\sigma'|_{\hat{S}} \equiv \sigma \mod \pi^\lambda$ *bezüglich gegebener Modelle.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd] & & \\
& S' \arrow[ul, dashed, "\sigma'"'] \arrow[dl, dashed, hook] \arrow[r, phantom, "\Supset"] & \hat{S} \arrow[ull, "\sigma"'] \arrow[dll, hook] \\
S & &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Zunächst wollen wir die Situation reduzieren auf den Fall, daß S und $\hat{S}$ Polyzylinder sind wie im Glättungssatz. Wir schreiben die gegebene Beziehung dazu in Gleichungen um, d.h.

$$\begin{aligned} S &= V(g_1, \ldots, g_s) \subseteq \mathbb{D}^n_K(c) \\ \hat{S} &= S \cap \mathbb{D}^n_K(1) \\ X &= V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{D}^N_S \\ \sigma(\hat{S}) &\subseteq \mathbb{D}^N_S(\varepsilon) \end{aligned}$$

mit gewissen Radien $c_1, \ldots, c_n > 1$, und einem $\varepsilon < 1$. Es seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_N$ die Koordinaten von $\mathbb{D}^n_K$ bzw. $\mathbb{D}^N_S$. Der Schnitt σ induziert Elemente

$$\begin{aligned} \hat{y}_\nu &\in K\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle,\ \nu = 1, \ldots, n \\ \hat{a}_{ij} &\in K\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_n\rangle,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s \end{aligned}$$

derart, daß

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_\nu\| &< 1, \\ f_i(\hat{y}) &= \sum_{j=1}^{s} \hat{a}_{ij} g_j, \end{aligned}$$

denn es gilt $\sigma(\hat{S}) \Subset_S \mathbb{D}^N_S(\varepsilon)$. Umgekehrt induziert jedes System $((\hat{y}_\nu), (\hat{a}_{ij}))$ mit diesen Eigenschaften einen $\hat{S}$-wertigen Punkt $\sigma : \hat{S} \to X$. Nach geeigneter Wahl von $g_1, \ldots, g_r$ kann man annehmen, daß

$$\|\hat{a}_{ij}\| < 1,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s .$$

Man betrachte nun das Gleichungssystem

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} Z_{ij} g_j,\ i = 1, \ldots, r$$

in den Variablen Y und Z. Diese Gleichungen haben eine Lösung über $K\langle\zeta\rangle$. Das Gleichungssystem definiert eine affinoide Varietät über $K\langle c^{-1}\zeta\rangle$ derart, daß die Lösung einen Schnitt über $\operatorname{Sp} K\langle c^{-1}\zeta\rangle$ definiert, welcher über eine relativ S-kompakte Untervarietät faktorisiert. Daher kann man $\hat{S} = \mathbb{D}^n_K(1)$ und $S = \mathbb{D}^n_K(c)$ annehmen.

Nun können wir den Glättungssatz anwenden und folglich annehmen, daß X relativ glatt über S ist von der relativen Dimension $N - m$. Das Resultat folgt nun aus Satz 4.2.3. □

Kapitel 6

Anwendungen

6.1 Approximation von endlichen Abbildungen

Es sei ein Diagramm zulässiger formeller separierter S-Schemata der Form

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\varphi|_U"'] \\ X \arrow[d] & V \arrow[l, hook'] \\ S & \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

gegeben, wobei $U \Subset_S Z$ und $V \Subset_S X$ offene Unterschemata seien, die in Z bzw. X relativ kompakt seien.

Zusätzlich zu obigen Bedingungen werden wir voraussetzen, daß φ_{rig} endlich ist bzw. eine abgeschlossene Immersion ist. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, Aufblasungen $Z' \to Z$, $X' \to X$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "\text{blow}"'] \arrow[dd] & & U' \arrow[ll, hook'] \arrow[dd, dashed, "\varphi'"] \\ Z \arrow[dd, "\varphi"'] & & U \arrow[ll, hook'] \arrow[ur, hook] \arrow[dd, "\varphi|_U"] & \\ & X' \arrow[dl, "\text{blow}"'] & & V' \arrow[ll] \\ X \arrow[d] & & V \arrow[ll, hook'] \arrow[ur, hook] & \\ S & & & \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

zu konstruieren derart, daß $U_0 \Subset_{S_0} U_0'$, $V_0 \Subset_{S_0} V_0'$, und $(\varphi|_U)'_{\text{rig}}$ sich fortsetzen läßt zu einem Morphismus $\varphi : U' \to V'$, der gewisse Eigenschaften von $(\varphi|_U)_{\text{rig}}$ erbt, z.B. endlich oder abgeschlossene Immersion.

Wir wollen dabei die Schreibweise $\Subset$ für formelle und algebraische Schemata übernehmen. Ein formelles Schema $U \subseteq Z$ heiße *relativ* S*-eigentlich* in Z, in Zeichen $U \Subset_S X$, falls U_0 relativ S_0-eigentlich in Z_0 ist, in Zeichen $U_0 \Subset_{S_0} Z_0$, d.h. der schematische Abschluß $\overline{U_0}$ von U_0 in Z_0 ist eigentlich über S_0.

Lemma 6.1.1 *Es sei $\varphi : Z \to X$ ein Morphismus zulässiger formeller Schemata, und V sei ein offenes Unterschema von X Es sei $\mathscr{J}$ ein kohärentes Ideal von $\mathcal{O}_X$ so, daß $V(\mathscr{J}\mathcal{O}_{X_0}) = X_0 \setminus V_0$. Es sei $X^n \to X$ die zulässige formelle Aufblasung von $(\pi, \mathscr{J}^n)$, und V^n sei das offene Unterschema von X^n, wo π in $\mathscr{J}^n\mathcal{O}_{X^n}$ enthalten ist. Es sei ferner $\varphi^{-1}(V) = U \cup W$ eine disjunkte Vereinigung offener Unterschemata. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n \geq n_0$ eine disjunkte Vereinigung*

$$\varphi^{-1}(V^n) \ = \ U^n \cup W^n$$

offener Unterschemata existiert mit

$$U^n \cap \varphi^{-1}(V) \ = \ U, \ \ W^n \cap \varphi^{-1}(V) \ = \ W \, .$$

Beweis: Es seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ offene kohärente Ideale von $\mathcal{O}_Z$ so, daß

$$V(\mathscr{F}\mathcal{O}_{Z_0}) \ = \ Z_0 \setminus U_0, \ \ V(\mathscr{G}\mathcal{O}_{Z_0}) \ = \ Z_0 \setminus W_0 \, .$$

Es sei $Z^n \to Z$ die zulässige formelle Aufblasung von $(\pi, \mathscr{F}^n, \mathscr{G}^n)$. Man setze

$$\begin{array}{lcl} Z^n \ \supseteq \ U^n & := & \{z \in Z^n \, ; \, \pi \in \mathscr{F}^n\mathcal{O}_{Z^n,z}\} \ \supseteq \ U, \\ Z^n \ \supseteq \ W^n & := & \{z \in Z^n \, ; \, \pi \in \mathscr{G}^n\mathcal{O}_{Z^n,z}\} \ \supseteq \ W \, . \end{array}$$

Da $\mathscr{F}$ bzw. $\mathscr{G}$ topologisch nilpotent außerhalb von U_0 bzw. W_0 sind, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, daß $U^n \cap W^n = \emptyset$ gilt für alle $n \geq n_1$. Wegen $\varphi^{-1}(V) = U \cup W$ und $V(\mathscr{J}\mathcal{O}_{X_0}) = X_0 \setminus V_0$ gibt es ein $\nu \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\mathscr{J}^\nu\mathcal{O}_Z \ \subseteq \ (\mathscr{F}, \mathscr{G})\mathcal{O}_Z \, .$$

Also sehen wir, daß $Z^n \times_X V^{2\nu n} \to Z^n$ über $U^n \cup W^n$ faktorisiert für alle $n \geq n_1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 6.1.2 *Es sei ein Diagramm der Form (6.1) gegeben. Es sei U ein offenes Unterschema von Z mit $U_0 \Subset_{S_0} Z_0$, und V sei ein offenes quasi-kompaktes Unterschema von X mit $V_0 \Subset_{S_0} X_0$. Wir nehmen an, daß die Einschränkung $\varphi|_U : U \to V$ einen Morphismus liefert, und daß $(\varphi|_U)_{\mathrm{rig}}$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt.*

(i) eigentlich,

(ii) endlich,

(iii) Isomorphismus,

(iv) abgeschlossene Immersion.

Dann gibt es ein Diagramm der Form (6.2), d.h. es gibt zulässige formelle Aufblasungen $Z' \to Z$ bzw. $X' \to X$ und ein offenes Unterschema U' von Z' mit $U_0 \Subset_{S_0} U_0'$ sowie ein offenes Unterschema V' von X' mit $V_0 \Subset_{S_0} V_0'$ derart, daß sich $(\varphi|_{U'})_{\mathrm{rig}}$ zu einem S-Morphismus $\varphi' : U' \to V'$ fortsetzen läßt, der dieselbe Bedingung erfüllt.

Beweis:

(i) Es sei $\mathscr{J}$ eine kohärente Garbe offener Ideale von $\mathcal{O}_X$ derart, daß $V(\mathscr{J}\mathcal{O}_{X_0}) = X_0 \setminus V_0$. Man betrachte die formelle Aufblasung $X^n \to X$ von $(\pi, \mathscr{J}^n)$ in X und das offene Unterschema V^n, welches durch die Bedingung $\pi \in \mathscr{J}\mathcal{O}_{X^n}$ definiert sei. Für $n \geq 2$ ist das Unterschema V^n nach [16], 3.8, ebenfalls relativ S-eigentlich in X^n. Auf ähnliche Weise definiert man Z^n und U^n bezüglich $(\pi, \mathscr{J}^n)\mathcal{O}_Z$. Dann erhält man ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U^n \arrow[r] \arrow[d] & V^n \arrow[d] \\ Z^n \arrow[r] & X^n \end{tikzcd} \quad . \tag{6.3}$$

Nun ist $(\varphi|_U)_{\mathrm{rig}}$ eigentlich, und nach Lemma 3.7.3 ist auch $\varphi|_U : U \to V$ eigentlich. Daher ist die Inklusionsabbildung $U \hookrightarrow \varphi^{-1}(V)$ eigentlich nach [13], 5.4.3. Folglich ist U eine Zusammenhangskomponente von $\varphi^{-1}(V)$. Wählen wir n groß genug, so gibt es nach Lemma 6.1.1 eine Zusammenhangskomponente W^n von U^n mit $W^n \cap \varphi^{-1}(V) = U$. Dann ist W^n auch relativ S-eigentlich in Z. Indem man Z durch W^{n_0} ersetzt für ein n_0, kann man annehmen, daß $U = \varphi^{-1}(V)$ gilt. Dann ist die obere horizontale Abbildung im Diagramm (6.3) eigentlich, da der schematische Abschluß von U_0^n in Z_0^n eigentlich über S_0 ist.

(ii) Nun nehmen wir an, daß $(\varphi|_U)_{\mathrm{rig}}$ endlich ist. Also ist diese Abbildung auch eigentlich. Nach (i) können wir annehmen, daß φ_{rig} eigentlich ist. Nach Lemma 3.7.3, können wir annehmen, daß φ eigentlich ist. Wie in (i) kann man annehmen, daß $\varphi^{-1}(V) = U$ gilt. Man setze

$$B_K \ := \ \{x \in X_{\mathrm{rig}} \ ; \ \dim \varphi^{-1}(x) \geq 1\} \ .$$

Dann ist B_K eine abgeschlossene analytische Teilmenge von X_{rig} und disjunkt zu V_{rig}. Wir wollen dieselbe Notation wie in (i) verwenden. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß B_K die Menge V^n nicht trifft. Wir können annehmen, daß $X = V^n$. Somit hat φ_{rig} endliche Fasern. Mit [6], 5.10, folgt, daß es ein Modell von φ'_{rig} gibt, welches endlich ist. Ein solches Modell kann durch eine zulässige Aufblasung von X erhalten werden. Daraus folgt die Behauptung.

(iii) Nach (ii) können wir annehmen, daß φ_{rig} endlich ist, und wie vorhin erklärt, daß φ endlich ist. Darüberhinaus kann man wie vorher annehmen, daß $\varphi^{-1}(V) = U$ gilt. Man betrachte den Morphismus

$$\lambda : \mathcal{O}_X \to \varphi_* \mathcal{O}_Z \ .$$

Der Träger seines Kerns bzw. Cokerns ist disjunkt zu V. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß der Träger die Menge V^n nicht trifft. Daher können wir X durch V^n ersetzen. Somit ist φ ein Isomorphismus.

(iv) Wiederum können wir annehmen, daß φ endlich ist. Dann können wir X durch das schematische Bild ersetzen und die Situation auf den Fall (iii) reduzieren. □

Dieser Satz impliziert auch das Ergebnis von [10], Corollary 1.

Wir wollen diese Ergebnisse nun auf die Situation von Satz 4.2.3 anwenden.

Satz 6.1.3 *Es sei ein Diagramm zulässiger formeller S-Schemata der Form*

$$\begin{tikzcd}
Z & U \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\varphi"'] \\
X \arrow[d] & V \arrow[l, hook'] \\
S &
\end{tikzcd} \tag{6.4}$$

gegeben, wobei $U \Subset Z$ und $V \Subset_S X$ offene Unterschemata seien, die in Z bzw. X relativ S-kompakt seien. Zusätzlich sei Z_{rig} affinoid und U_{rig} ein Weierstraßbereich in Z_{rig}. Dann gibt es eine zulässige formelle Aufblasung $Z' \to Z$ und ein offenes Unterschema U' von Z' mit $U_0 \Subset_{S_0} U'_0$, sowie eine zulässige formelle Aufblasung $X' \to X$ und ein offenes Unterschema V' von X' mit $V_0 \Subset_{S_0} V'_0$, und es gibt einen S-Morphismus $\varphi' : U' \to V'$ so, daß die Einschränkung $\varphi'|_U : U \to V$ einen Morphismus liefert, der mit φ bis zu einem vorgegebenen Level λ übereinstimmt derart, daß

(i) wenn φ_{rig} endlich ist, so ist es auch φ'_{rig},

(ii) wenn φ_{rig} eine abgeschlossene Immersion ist (bzw. ein Isomorphismus), so ist es auch φ'_{rig}.

Wir bekommen also ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl, "blow"'] & & U' \arrow[ll, hook'] \arrow[dd, dashed, "\varphi'"] \\
Z & & U \arrow[ll, hook'] \arrow[ur, hook] \arrow[dd, "\varphi"] & \\
& X' \arrow[dl, "blow"'] & & V' \arrow[ll, hook'] \\
X \arrow[d] & & V \arrow[ll, hook'] \arrow[ur, hook] & \\
S & & &
\end{tikzcd} \tag{6.5}$$

Beweis: Die Approximation φ' und das Diagramm (6.5) folgt aus dem Approximationssatz (5.2.1), wobei man $U_{\mathrm{rig}} = \hat{S}$ und $Z_{\mathrm{rig}} = S$ in jenem Satz wähle. Wir müssen noch klären, daß die Approximation so gewählt werden kann, daß die Zusatzeigenschaften erfüllt sind.

(i) Eine Abbildung $\varphi : \operatorname{Spf} A \to \operatorname{Spf} B$ ist endlich genau dann, wenn die Abbildung $B_0 \to A_0$ endlich ist. Daher können wir die Approximation so einrichten, daß die Einschränkung $(\varphi'|_U)_{\mathrm{rig}}$ endlich ist. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 6.1.2.

(ii) Wie in (i) können wir annehmen, daß $(\varphi'|_U)_{\mathrm{rig}}$ eine abgeschlossene Immersion bzw. ein Isomorphismus ist. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 6.1.2.

6.2 Stabilität formeller Néron-Modelle

Wir wollen in diesem Abschnitt die Ergebnisse des letzten Abschnittes, speziell Satz 6.1.3, auf rigide Gruppen anwenden und auf die Frage nach der Stabilität formeller Néron-Modelle eingehen. Wir beginnen mit einem Spezialfall von Satz 6.1.3.

Korollar 6.2.1 *Es sei $\varphi : \mathbb{D}^d \hookrightarrow X$ eine offene Immersion, wobei X ein separierter glatter rigider Raum sei. Es gelte $\varphi(\mathbb{D}^d) \Subset X$. Dann gibt es eine Approximation $\varphi' : \mathbb{D}^d(c) \hookrightarrow X$ von φ mit einem $c > 1$, welche ebenfalls eine offene Immersion ist. Insbesondere kann man die Approximation so wählen, daß die Bildmengen von φ und $\varphi'|_{\mathbb{D}^d}$ übereinstimmen.*

Wir betrachten nun eine rig-glatte Gruppe G_K über einem vollständigen diskret bewerteten Körper K mit Bewertungsring R und Restklassenkörper k.

Unter einem *formellen Néron-Modell* von G_K versteht man die größte Untergruppe N von G_K, welche ein glattes quasi-kompaktes formelles Modell über R zuläßt. Man kann zeigen, daß G_K ein formelles Néron-Modell besitzt, wenn sie *beschränkt* ist, d.h.quasi-kompakt und abelsch. Dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn G_K eigentlich über K ist.

Ein formelles Néron-Modell N von G_K heißt *stabil*, falls die 1-Komponente kompatibel mit endlicher Körpererweiterung von K ist. Man sagt, das formelle Néron-Modell N habe *semi-abelsche Reduktion*, falls $N \otimes_R k$ semi-abelsch ist.

Hat ein formelles Néron-Modell semi-abelsche Reduktion, so ist es stabil. Die Umkehrung gilt im Falle einer eigentlichen Gruppe und ist schwieriger zu zeigen. Das Hauptargument ist Satz 6.2.2.

Man sagt, eine quasi-kompakte rigide Gruppe G_K hat *unipotente Reduktion*, falls G_K ein glattes formelles Modell über R besitzt derart, daß die spezielle Faser G_0 eine unipotente algebraische Gruppe ist.

Satz 6.2.2 *Es sei G_K eine beschränkte rig-glatte Gruppe. Es sei H_K eine offene quasi-kompakte zusammenhängende Untergruppe, welche ein formelles* *glattes Modell H mit unipotenter Reduktion zuläßt. Falls $H_K \Subset G_K$, dann gibt es nach endlicher separabler Körpererweiterung eine Untergruppe H'_K vom selben Typ wie H_K mit $H_K \Subset H'_K$.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, der Restklassenkörper von R sei perfekt. Da H_0 unipotent ist, gibt es nach dem Satz von Lazard ([11], IV, §4, $n^0 4$, 4.1) einen Isomorphismus von Schemata

$$u : \mathbb{A}_k^d \xrightarrow{\cong} H_0 .$$

Nach der Liftungseigenschaft der Glattheit gibt es einen Isomorphismus formeller Schemata

$$u : \mathbb{D}_R^d \xrightarrow{\cong} H .$$

Wegen $H_K \Subset G_K$ können wir Korollar 6.2.1 anwenden. Also gibt es eine Approximation

$$u' : \mathbb{D}_K^d(c) \xrightarrow{\cong} V_K$$

von U, wobei $c = (c_1, \ldots, c_d)$ mit $c_i > 1$ für $i = 1, \ldots, d$, und wobei

$$H_K \Subset V_K \Subset G_K .$$

Dabei läßt sich u' zu einem Isomorphismus $\mathbb{D}_K^d \xrightarrow{\cong} H_K$ einschränken. Wir führen nun eine Körpererweiterung derart durch, daß $|c_i| \in |K^\times|$ liegen. Dann hat $\mathbb{D}_K^d(c)$ ein glattes Modell über R. Nach [17], Remark 1.6, kann man H'_K als die von u' erzeugte Gruppe wählen. Diese hat nach dem Satz von Lazard ein glattes Modell mit unipotenter Reduktion.

Ist der Restklassenkörper nicht perfekt, dann gibt es eine endliche separable Körpererweiterung K' von K mit Bewertungsring R' und Restklassenkörper k' so, daß die zugrundeliegende Varietät von $(H \otimes_R R')_0$ isomorph zu $\mathbb{A}_{k'}^d$ ist. Dann kann man das oben Bewiesene anwenden. □

Korollar 6.2.3 *Ein stabiles formelles Néron-Modell einer eigentlichen rig-glatten Gruppe über K hat semi-abelsche Reduktion.*

6.3 Multiplikative Untergruppen eigentlicher rigider Gruppen

Eine letzte Anwendung des Approximationssatzes ist die Ausdehnung formeller multiplikativer Gruppenhomomorphismen.

Es sei dazu

$$\bar{\mathbb{G}}_{m,K} := \{z \in \mathbb{G}_{m,K} ; |z| = 1\}$$

der Einheitentorus.

Satz 6.3.1 *Es sei $\bar{\varphi} : \bar{\mathbb{G}}_{m,K} \to G_K$ ein Homomorphismus rigider Gruppen. Wir nehmen an, daß $\bar{\varphi}(\bar{\mathbb{G}}_{m,K}) \Subset G_K$. Dann läßt sich $\bar{\varphi}$ zu einem Homomorphismus $\varphi : \mathbb{G}_{m,K} \to G_K$ ausdehnen.*

Dies ist [17], Prop. 3.1. Im Beweis geht man wie folgt vor.

- Man approximiert $\bar{\varphi}$ durch ein $\varphi' : \mathbb{G}_{m,K}(c) \to G_K$ mit $|c| > 1$.
- Man zeigt $\varphi' = \chi \cdot \psi$, wobei $\chi : \mathbb{G}_{m,K} \to G_K$ ein multiplikativer Gruppenhomomorphismus ist, und $\psi : \mathbb{G}_{m,K}(c) \to G_K$ „nahe“ 1 ist; d.h. $\psi|_{\mathbb{G}_{m,K}} = 1 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon \approx 0$. Insbesondere ist φ' eine Fortsetzung von $\bar{\varphi}$.

Literaturverzeichnis

[1] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. math. 5 (1968), 277-291

[2] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. Math. IHES 36 (1969)

[3] M. Artin und C. Rotthaus, *A structure theorem for power series rings*, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi Nagatm vol.1, Tokyo (1987)

[4] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1984)

[5] S. Bosch and W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, I. Rigid spaces*, Math. Ann. 295 (1993), 291-317

[6] S. Bosch and W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, II. Flattening techniques*, Math. Ann. 296 (1993), 403-429

[7] S. Bosch and W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, III. The relative maximum principle*, Math. Ann. 302 (1995), 1-29

[8] S. Bosch and W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, IV. The Reduced Fibre Theorem*, Invent. math. 119 (1995), 361-398

[9] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Springer Verlag Berlin, Heidelberg (1990) Algebra in Honor of Masayoshi Nagat, vol. 1, Tokyo (1987)

[10] S. Bosch, *A Rigid Analytic Version of M. Artin's Theorem on Analytic Equations*, Math. Ann. 255 (1981), 395-404

[11] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébrique*, I, Masson, Paris (1970)

[12] R. Elkik, *Solutions d'équations à coéfficients dans un anneau hensélien*, Ann. scient. Éc. Norm.

[13] A. Grothendieck, *Eléments de Géometrie Algébrique II*, Publ. Math. 8 (1961) Sup., 4^e série, t.6 (1973), 553-604

[14] R. Kiehl, *Analytische Familien affinoider Algebren*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 2. Abhandlung (1968)

[15] S. Lang, *On quasi algebraic closure*, Ann. Math. 55 (1952), 373-390

[16] W. Lütkebohmert, *Formal-algebraic and rigid-analytic geometry*, Math. Ann. 286 (1990), 341-371

[17] W. Lütkebohmert, *The structure of proper rigid groups*, J. reine angew. Math. 468 (1995), 167-219

[18] M. Raynaud, *Anneaux Locaux Henséliens*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag (1970)

[19] M. Raynaud, *Géometrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,...*, Table ronde d'analyse non archimedienne. Bull. Soc. Math. Fr. Mém. 39/40 (1974), 319-327

[20] M. Temkin, *On local properties of non-Archimedean spaces*, Math. Ann. 318 (2000), 585-607.

Abstract

Let K be a field with a complete non-archimedean valuation. Let S be an affinoid K-space, and let $\hat{S}$ be a Weierstrass domain in S which is relatively compact in S. Let $\sigma : \hat{S} \to X$ be an S-morphism such that the image of σ is relatively S-compact in X. The main theorem of this thesis states that σ factors through an affinoid S-space X^g which is smooth over S.

As a consequence, a version of Artin's approximation theorem is proved. It states that under the above conditions, one can find an extension S' of $\hat{S}$, i.e. an open subdomain S' of S such that $\hat{S}$ is relatively compact in S', and an S'-morphism $\sigma' : S' \to X$ which approximiates the given morphism σ up to a given level on the formal models.

As a special case, let $\hat{S} = \mathbb{D}_K^n$ be the n-dimensional ball of radius 1 over K, and let $S = \mathbb{D}_K^n(1+\varepsilon)$ be the n-dimensional ball of radius $1+\varepsilon$, where $\varepsilon > 0$. Let f be a system of formal power series in N variables over the ring $\mathcal{O}(S)$, and let $\hat{a}$ be a solution of the system $\mathrm{f}(Y) = 0$ over $\mathcal{O}(\hat{S})$, i.e. over the ring of formal power series converging on $\hat{S}$. Then there exists a slightly larger ball $S' = \mathbb{D}_K^n(1+\delta)$ where $\varepsilon > \delta > 0$ and a solution a' of the system $\mathrm{f}(Y) = 0$ over $\mathcal{O}(S')$ such that a' approximates the given solution a up to a given bound.

If X is smooth over S, the approximation result is already well-known. In this thesis, a new proof is given using the approximation techniques of R. Elkik.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei meiner Lebenspartnerin Daniela Berger und meinen Eltern Marianne und Wolfgang Martin für Geduld und Zuspruch. Besonders möchte ich mich bei Prof. Dr. Werner Lütkebohmert für die interessante Themenstellung und die ausgezeichnete Betreuung bedanken. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr. Gabriele Nebe, Priv.-Doz. Dr. Stefan Wewers, Dr. Matthias Künzer, Jörg Marhenke und Wiltrud Cuny sowie den den anderen ehemaligen und derzeitigen Angestellten der Abteilung Reine Mathematik an der Universität Ulm für die Unterstützung und ihre Anregungen bedanken. Mein Dank richtet sich auch an alle weiteren Kollegen an der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe, und daß ich alle Stellen, die dem Wortlaut oder der Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht habe.