

Mengenbasierte Black-Box-Identifikation linearer Systeme

Stefan Zaiser

Stefan Sebastian Zaiser

Mengenbasierte Black-Box-Identifikation linearer Systeme

Schriftenreihe des
Instituts für Mess-, Regel- und Mikrotechnik
Universität Ulm

Herausgeber:
Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer

Band 21

Stefan Sebastian Zaiser

Mengenbasierte Black-Box-Identifikation linearer Systeme

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Dissertation, Universität Ulm,
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Informatik und Psychologie, 2017

Impressum

Universität Ulm
Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik
Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer
Albert-Einstein-Allee 41
89081 Ulm
<http://www.uni-ulm.de/mrm>

Eine Übersicht über alle Bände der Schriftenreihe finden Sie unter
<http://www.uni-ulm.de/mrmschriften>.

Diese Veröffentlichung ist im Internet auf dem Ulmer Volltextserver (<http://vts.uni-ulm.de>) verfügbar und dort unter der Lizenz "B - Standard (ohne Print-On-Demand)" publiziert. Details zur Lizenz sind unter <http://www.uni-ulm.de/index.php?id=50392> zu finden.

Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik der Universität Ulm 2017
Print on Demand

ISBN 978-3-941543-30-0

e-ISBN 978-3-941543-31-7



Mengenbasierte Black-Box-Identifikation linearer Systeme

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

(Dr.-Ing.)

der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Informatik
und Psychologie der Universität Ulm

von

Stefan Sebastian Zaiser
aus Biberach an der Riß

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer
Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann

Amtierender Dekan: Prof. Dr. rer. nat. Frank Kargl

Ulm, 07.03.2017

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik (MRM) der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Informatik und Psychologie an der Universität Ulm. Ich möchte mich daher ganz besonders bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer, dem Leiter des Instituts, für die Ermöglichung dieser Arbeit und die Betreuung meiner Dissertation bedanken. Ohne die von Ihm geschaffenen Arbeitsbedingungen und sein entgegengebrachtes Vertrauen würde diese Arbeit heute nicht existieren. Ebenfalls danken möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens.

Mein besonderer Dank gilt weiterhin Herrn Dr.-Ing. Michael Buchholz für die zahlreichen Diskussionen und Anregungen zu dieser Arbeit und meiner Tätigkeit in verschiedenen Projekten am Institut. Das Korrekturlesen dieser Arbeit und meiner Publikationen hat mir sehr geholfen. Die Bereitstellung der L^AT_EX-Vorlage durch Michael Buchholz und Jürgen Remmlinger hat mir die Formatierung der Arbeit sehr erleichtert, auch hierfür herzlichen Dank.

Bei allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen aus meiner Zeit am Institut möchte ich mich für die sehr freundliche und kollegiale Atmosphäre bedanken. Besonders hervorheben möchte ich dabei meine Bürokollegen Thomas Bächle, der diese Arbeit ebenfalls Korrektur gelesen hat, und Matthias Baumann, der mich bei der Fehlersuche unterstützt hat. Hierfür ein großes Dankeschön. Weiterhin möchte ich mich bei Claudia Fricke und den Kollegen aus der Technik für die Unterstützung und Zusammenarbeit bei organisatorischen und praktischen Problemen bedanken.

Besonders danken möchte ich meiner Frau Maria für ihre Unterstützung während meiner Promotionszeit und insbesondere während der intensiven Zeit des Schreibens. Ohne ihre Geduld, ihr offenes Ohr und ihr Verständnis wäre dies nicht möglich gewesen. Danken möchte ich auch meiner Familie und meinen Freunden, die für die notwendige Abwechslung gesorgt haben. Euch allen vielen Dank!

Weissach, im März 2017

Stefan Zaiser

Kurzfassung

Die wachsende Bedeutung modellbasierter Verfahren bei technischen Geräten und Anlagen führt dazu, dass immer mehr Modelle für unterschiedliche Systeme benötigt werden. Um diesem Umstand gerecht zu werden, kommen in den letzten Jahren verstärkt Verfahren zur datenbasierten Modellbildung zum Einsatz, da diese meist zu genauen Modellen mit einer geringen Modellkomplexität führen. Gleichzeitig steigen jedoch auch die Anforderungen an die Sicherheit der Systeme. Eine genaue Kenntnis der Modellunsicherheit ist erforderlich, um auftretende Fehler sicher zu detektieren. Einen vielversprechenden Ansatz hierzu stellen mengenbasierte Verfahren dar, da an Stelle einzelner Werte mit der Menge aller möglichen Werte gerechnet wird.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur mengenbasierten Black-Box-Identifikation linearer Systeme vorgestellt. Den Ausgangspunkt des Verfahrens stellen Messdaten mit unbekanntem, aber beschränktem Fehler dar, welche durch Intervalle repräsentiert werden. Das Verfahren wird zunächst für Systeme mit einer Ausgangsgröße vorgestellt und anschließend für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen erweitert. Als Ergebnis wird von dem Verfahren ein zeitdiskretes Gleichungsfehlermodell in ARX-Struktur (Auto Regressive with eXogenous input) mit minimaler Modellordnung bestimmt.

Den Schwerpunkt der Arbeit bildet dabei die Ordnungsbestimmung des Systems. Die so bestimmte minimale Ordnung wird mit verschiedenen mengenbasierten Parameteridentifikationsverfahren zur mengenbasierten Black-Box-Identifikation verwendet. Als mögliche Anwendung der so identifizierten Modelle wird in dieser Arbeit die Fehlerdetektion betrachtet. Dazu wird eine Möglichkeit vorgestellt, direkt die bei der Identifikation gewonnenen ARX-Modelle zu nutzen. Die Vorgehensweise wird anhand verschiedener simulativer Beispielsysteme sowie an unterschiedlichen Laborsystemen demonstriert.

Abstract

The increasing importance of model-based methods for technical equipment and installations leads to a growing demand for models of various systems. To meet these demands, data-based modeling approaches have been applied often in the past few years, as they usually lead to precise models with a low model complexity. The demands on the safety of the systems increased at the same time. A detailed knowledge on the model uncertainty is necessary to reliably detect faults. Therefore, promising approaches are set-membership based methods, as they compute the whole set of possible values instead of individual values.

In this work, a set-membership method for black-box identification of linear systems is presented. Starting point of the method is measurement data with unknown but bounded errors, which are represented by intervals. The method is initially presented for systems with a single output and afterwards extended to multiple output systems. The result is an equation-error model in ARX (Auto Regressive with eXogenous inputs) structure with the minimal model order.

The main focus of this work is the order determination of the system. The thereby determined minimal order is used with various set-membership parameter identification methods to obtain a complete black-box system identification method. In this work, fault detection is considered as possible application of the identified models. For that purpose, a fault detection method directly using the identified ARX-model is presented. The procedure is demonstrated by means of several simulative examples as well as various laboratory systems.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Modelle dynamischer Systeme	6
2.1.1	Modelle in Ein-/Ausgangsform	7
2.1.2	Zustandsraummodelle	10
2.1.3	Umrechnung verschiedener Modellformen	12
2.2	Beschreibung von Unsicherheiten	16
2.2.1	Stochastische Unsicherheitsbeschreibung	17
2.2.2	Mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibung	18
2.2.3	Vergleich beider Beschreibungsformen für Unsicherheiten	29
2.3	Identifikation dynamischer Systeme	30
2.3.1	Allgemeine Voraussetzungen zur Identifikation	31
2.3.2	Überblick über Identifikationsverfahren mit stochastischer Unsicherheitsbeschreibung	32
2.4	Zusammenfassung und Überblick	36
3	Stand der Technik zur mengenbasierten Identifikation und Fehlerdetektion	37
3.1	Black-Box-Identifikation	39
3.2	Parameteridentifikation	40
3.2.1	Lineare Intervall-Gleichungssysteme	40
3.2.2	Lineare Optimierung mit Intervallen	46
3.2.3	Mengeninversion	47
3.2.4	Verfahren zum Einschluss der Parameter durch Ellipsoide	50
3.2.5	Verfahren zum Einschluss der Parameter durch Zonotope	51
3.2.6	Weitere Möglichkeiten zur mengenbasierten Parameteridentifikation	52
3.3	Mengenbasierte Fehlerdetektion	53
3.4	Zusammenfassung und Überblick	57

4	Ordnungsbestimmung bei beschränkter Unsicherheit	59
4.1	Grundidee ohne Unsicherheitsbetrachtung	60
4.1.1	Aufbereitung der Messdaten	60
4.1.2	Analyse der Datenmatrix	61
4.1.3	Beispiel eines MISO-Systems ohne Unsicherheit	64
4.2	Ordnungsbestimmung für unsichere Systeme mit einer Ausgangsgröße	66
4.2.1	Vorgehensweise für Intervall-Messdaten	66
4.2.2	Grenzen der Ordnungsbestimmung	68
4.2.3	Beispiel des MISO-Systems mit beschränkter Unsicherheit . .	71
4.3	Erweiterung für unsichere Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen . .	72
4.3.1	Ansätze zur direkten Erweiterung	72
4.3.2	Beispiele zur direkten Erweiterung	75
4.3.3	Bestimmung der minimalen Modellordnung	79
4.3.4	Beispiele zur Bestimmung der minimalen Ordnung von MIMO- ARX-Modellen	87
4.3.5	Anwendung der Ordnungsbestimmung für instabile Systeme .	90
4.3.6	Beispiel eines instabilen Systems	93
4.4	Zusammenfassung und Überblick	95
5	Mengenbasierte Black-Box-Identifikation und Fehlerdetektion	97
5.1	Black-Box-Identifikation	98
5.1.1	Überblick über das Verfahren	98
5.1.2	Erweiterungen der Parameteridentifikation	100
5.1.3	Simulationsbeispiele zur Identifikation	106
5.2	Fehlerdetektion mit identifizierten Modellen	117
5.2.1	Fehlerdetektion durch ARX-Filter	119
5.2.2	Simulationsbeispiele zur Fehlerdetektion	120
5.3	Zusammenfassung und Überblick	125
6	Anwendungsbeispiele	129
6.1	Füllstand eines Tanks	129
6.2	Alterung von Elektrolyt-Kondensatoren	133
6.2.1	SISO-Bandpass mit künstlicher Alterung	133
6.2.2	SISO-Bandpass mit gealterten Kondensatoren	135
6.2.3	SIMO-Bandpass mit simulierter Alterung	136
6.3	Zusammenfassung und Überblick	140
7	Zusammenfassung	141

A	Lösungsverfahren für lineare Intervall-Gleichungssysteme	145
A.1	Krawczyk-Methode	145
A.2	Hansen-Blik-Rohn-Ning-Kearfott-Neumaier-Methode	146
A.3	Präkonditioniertes Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren	147
A.4	Rohn-Methode für überbestimmte Gleichungssysteme	148
B	Identifikationsverfahren für Parametermengen	149
B.1	Modified-Optimal-Volume-Ellipsoid-Verfahren	149
B.2	Zonotop-Parameteridentifikation	151
C	Umformung eines Beispielsystems zu einem ARX-Modell höherer Ordnung	153
D	Parameter der betrachteten Simulationsbeispiele	155
D.1	Simulationseinstellungen der Beispielsysteme	155
D.2	Ellipsoid des MISO-Beispiels	156
D.3	Zonotop des ersten MIMO-Beispiels	157
D.4	Zustandsraumdarstellung des zweiten MIMO-Beispiels	158
D.5	Modellparameter des instabilen Beispiels	160
E	Betreute studentische Arbeiten	161
F	Eigene Veröffentlichungen	163
	Abkürzungsverzeichnis	165
	Symbolverzeichnis	167
	Literaturverzeichnis	169

Kapitel 1

Einleitung

Kaum ein technisches System kommt heutzutage noch ohne regelungstechnische Verfahren aus. Die steigende Systemkomplexität sowie die Forderung nach immer effizienteren Systemen erfordert immer stärker den Einsatz fortschrittlicher Regelungsverfahren, welche auf Erkenntnissen aus dem Bereich der Systemtheorie beruhen. Gleichzeitig steigt der Bedarf an Verfahren zur Fehlerdetektion und zur Systemüberwachung, um potentielle Gefahren frühzeitig abwenden zu können. Durch den verstärkten Einsatz von Mikrocontrollern und Mikroprozessoren steht heute bei vielen Geräten eine Plattform zur Verfügung, um auch größere Datenmengen und komplexere Algorithmen im Betrieb zu verarbeiten und somit die Möglichkeiten der Geräte und Anlagen besser auszunutzen. Dazu wird allerdings eine genaue Kenntnis des Systemverhaltens benötigt. Das Verhalten muss dabei zum einen in Form von Expertenwissen vorhanden sein, um geeignete Verfahren auszuwählen und diese erfolgreich für den geplanten Einsatzzweck anzupassen. Zum anderen wird aber meist auch eine mathematische Beschreibung des Systemverhaltens benötigt, um die Verfahren durch Simulationen zu optimieren sowie für den Einsatz modellbasierter Verfahren. Die wesentlichen Anforderungen an die eingesetzten Modelle sind, abhängig von der geplanten Modellnutzung, beispielsweise die exakte Abbildung des Systemverhaltens in einem großen Betriebsbereich oder auch eine geringe Rechenkomplexität, um den Einsatz bei Echtzeitanwendungen zu ermöglichen.

Die Erzeugung derartiger Modelle erfolgt klassischerweise durch Untersuchung der dem System zugrundeliegenden Effekte, beispielsweise der physikalischen Gesetze oder der chemischen Reaktionsgleichungen. Dieser rigorose Ansatz zur Modellbildung erfordert jedoch einen hohen Aufwand, da eine große Zahl verschiedener Effekte berücksichtigt werden muss und vorab nicht klar ist, welche davon sich tatsächlich im Ausgangsverhalten des Systems widerspiegeln. Die daraus resultierenden Modelle ermöglichen einen detaillierten Einblick in die inneren Abläufe im System, was jedoch durch eine meist hohe Modellkomplexität erkauft wird. Für viele Anwendungen ist daher eine Modellreduktion erforderlich, bei der für den vorgesehenen Einsatzzweck

vernachlässigbare Modellanteile verworfen werden. Die Bestimmung der im Modell enthaltenen Parameter für das betrachtete System stellt eine weitere Schwierigkeit bei der Modellbildung dar.

Um die Schwierigkeiten der Modellbildung zu reduzieren, kommen in den letzten Jahrzehnten verstärkt Identifikationsverfahren zum Einsatz. Dabei wird die Modellbildung unterstützt, indem am System gemessene Daten bei der Bestimmung des Modells mit genutzt werden. Im Extremfall, bei der Black-Box-Identifikation, erfolgt die Bestimmung sowohl der mathematischen Zusammenhänge als auch der darin vorkommenden Parameter aus den Messdaten, ohne dass Wissen über den inneren Aufbau und die Abläufe im System erforderlich ist. Häufig resultieren aus dieser Vorgehensweise Modelle mit hoher Genauigkeit und dennoch geringer Komplexität, da Vorgänge ohne signifikante Auswirkung auf die Ausgangsgrößen des Systems nicht durch das Modell abgebildet werden. Die so erzeugten Modelle sind jedoch nur in einem eingeschränkten Gültigkeitsbereich anwendbar.

Bei der Modellbildung, sei es durch rigorose Modellierung oder durch Nutzung von Identifikationsverfahren, ist die Berücksichtigung von Unsicherheiten ein wichtiger Faktor. Effekte wie beispielsweise Messfehler, ungenaues Stellverhalten der Aktorik oder Toleranzen der Bauteile im System müssen bei der Modellbildung berücksichtigt werden, um beim späteren Einsatz des Modells eine gute Übereinstimmung zwischen Systemverhalten und modelliertem Verhalten sicherzustellen. Insbesondere bei modellbasierten Verfahren zur Fehlerdetektion und Fehlerdiagnose stellt dies eine elementare Anforderung an das Modell dar. Um eine belastbare Aussage zum Betriebszustand eines Systems zu treffen werden daher Modelle benötigt, deren Verhalten in Bezug auf Unsicherheiten ausreichend genau bekannt ist.

Zur mathematischen Beschreibung der Unsicherheiten gibt es verschiedene Möglichkeiten. Meist werden diese durch stochastische Größen beschrieben, die einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. Diese Annahme ist jedoch nicht immer erfüllt, oft sind stattdessen für die Unsicherheit nur eine sichere obere und untere Schranke um den aktuellen Wert bekannt. Es handelt sich dabei um Daten mit beschränktem Fehler, für welche mengenbasierte (engl. set-membership) Verfahren zur Unsicherheitsbeschreibung eingesetzt werden können.

Die Arbeit an systemtheoretischen Verfahren basierend auf mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibungsformen begann in den sechziger Jahren des vorherigen Jahrhunderts und wurde in den letzten Jahrzehnten immer populärer. Insbesondere in den Bereichen Fehlerdetektion und Diagnose (vgl. z. B. [Pla07; Wol10]), Erreichbarkeitsanalyse (vgl. z. B. [Alt10]) oder Lokalisierung (vgl. z. B. [CMG⁺06]) haben mengenbasierte Verfahren eine gewisse Verbreitung erreicht. Dabei unterscheiden sich die mengenbasierten Verfahren grundlegend von Verfahren mit anderer Unsicherheitsbeschreibung, da anstatt eines einzelnen Werts die Menge aller möglichen

Werte betrachtet wird. Bei Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften dieser Unsicherheitsbeschreibung bei den mathematischen Operationen werden dadurch garantierte Aussagen in den Verfahren ermöglicht.

Auch bei Nutzung mengenbasierter Verfahren werden in der Regel Modelle zur sicheren Beschreibung des Systemverhaltens benötigt. Um die am System auftretenden Unsicherheiten im Modell abzubilden, werden dabei die Parameterwerte durch Parametermengen abgebildet. Die Erzeugung dieser Modelle erfolgt bisher häufig durch klassische Modellbildung mit anschließender Erweiterung der Parameter zu Parametermengen. Um die Parametermengen systematisch zu bestimmen, können verschiedene Parameteridentifikationsverfahren aus der Literatur genutzt werden. Es ist jedoch bisher kein Verfahren zur mengenbasierten Black-Box-Identifikation bekannt. Insbesondere wird bisher die Bestimmung der Modellordnung aus gemessenen Daten in der Literatur nicht behandelt.

Ziel dieser Arbeit ist es, diese Lücke zu schließen und eine Möglichkeit zur mengenbasierten Black-Box-Identifikation für lineare, zeitinvariante Systeme anzugeben. Durch eine neue Methode zur Ordnungsbestimmung aus Messdaten mit beschränkten Fehlern stehen alle Bausteine dazu zur Verfügung. Anhand verschiedener Beispiele wird die Nutzung der so gewonnenen Modelle zur Fehlerdetektion demonstriert.

Die Arbeit ist dabei folgendermaßen gegliedert: Im nächsten Kapitel (Kapitel 2) werden die Grundlagen für die Arbeit definiert. Zunächst werden verschiedene Beschreibungsformen für Systeme vorgestellt. Der Schwerpunkt wird dabei auf die in dieser Arbeit betrachteten linearen, zeitinvarianten Systeme gelegt, welche als zeitdiskrete Zustandsraummodelle oder als Modelle in zeitdiskreter Ein-/Ausgangsform beschrieben werden. Weiterhin werden verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von Unsicherheiten vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Übersicht über klassische Verfahren zur Identifikation dynamischer Systeme bei stochastischer Unsicherheitsbeschreibung.

Im dritten Kapitel wird der Stand der Forschung und Technik im Umgang mit beschränkter Unsicherheit präsentiert. Dabei liegt der Schwerpunkt auf Verfahren zur Identifikation von Modellen auf Basis von Messdaten mit beschränkter Unsicherheit. Verschiedene Parameteridentifikationsverfahren für unterschiedliche Arten der mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung, welche für diese Arbeit relevant sind, werden ausführlich vorgestellt. Zusätzlich beinhaltet das Kapitel eine Übersicht der bekannten Ansätze zur Fehlerdetektion bei Systemen mit beschränkter Unsicherheit.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Bestimmung der Systemordnung basierend auf Messdaten mit beschränkter Unsicherheit und stellt damit den Kern der Arbeit dar. Dabei werden zu Beginn Systeme mit lediglich einer Ausgangsgröße betrachtet, um die Grundidee des beschriebenen Verfahrens vorzustellen. Die für das Verfahren

notwendigen Voraussetzungen werden dabei ausführlich diskutiert. Anschließend werden verschiedene Ansätze zur Erweiterung dieser Grundidee für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen betrachtet. Die beschriebenen Vorgehensweisen sowie Eigenschaften werden anhand verschiedener Beispielsysteme verdeutlicht. Dieses Kapitel basiert auf den Veröffentlichungen [ZBD13; ZBD14a; ZBD14b; ZBD14c].

Nachdem in den Kapiteln 3 und 4 die einzelnen Komponenten der Identifikation dynamischer Systeme betrachtet wurden, wird in Kapitel 5 hieraus eine Kombination zur Black-Box-Identifikation aus Messdaten mit beschränkter Unsicherheit vorgestellt. Dabei wird beschrieben, wie die bei der Ordnungsbestimmung eingesetzten Datenstrukturen vorteilhaft bei der Parameteridentifikation genutzt werden können. Anschließend wird vorgestellt, wie die daraus resultierenden Modelle bei der Fehlerdetektion verwendet werden können. Zur Verdeutlichung werden die Beispielsysteme aus dem vorherigen Kapitel hier erneut betrachtet.

Kapitel 6 demonstriert die Anwendung der in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Vorgehensweise zur Black-Box-Identifikation an realen Systemen. Dabei wird zum einen ein Wassertank und zum anderen verschiedene Schaltungen mit RC-Gliedern betrachtet. Die so gewonnenen Modelle werden an den realen Systemen zur Fehlerdetektion eingesetzt.

Die Arbeit endet mit einer kurzen Zusammenfassung im siebten Kapitel. Darin werden die wesentlichen Erkenntnisse der Arbeit zusammengestellt und erneut kurz betrachtet.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die allgemeinen Grundlagen für die weiteren Kapitel beschrieben. Die verwendeten Beschreibungsformen und Verfahren werden dabei mit ihren spezifischen Eigenschaften und Voraussetzungen in das große Themengebiet der Systemtheorie eingeordnet. Zudem wird in diesem Kapitel die verwendete Notation eingeführt. Die Vorstellung der Beschreibungsformen und Verfahren in diesem Kapitel stellt keine vollständige Auflistung aller Möglichkeiten dar, sondern beschränkt sich auf die für diese Arbeit relevanten Grundlagen.

Im ersten Teil des Kapitels werden dazu die verwendeten Systembeschreibungsformen vorgestellt. Diese werden in den Kontext der mathematischen Systembeschreibungen eingeordnet und die charakteristischen Eigenschaften der jeweiligen Beschreibungsform verdeutlicht. Außerdem werden Möglichkeiten zur Umformung zwischen den betrachteten Systembeschreibungsformen vorgestellt. Dabei beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Betrachtung von linearen, dynamischen Systemen.

Im darauf folgenden Abschnitt werden verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von Unsicherheiten vorgestellt. Der Schwerpunkt wird dabei auf die in dieser Arbeit verwendeten mengenbasierten Beschreibungsformen gelegt. Dabei werden die charakteristischen Eigenschaften ebenso betrachtet wie die Unterschiede zwischen den unterschiedlichen Beschreibungsformen.

Der dritte Abschnitt des Kapitels widmet sich der Bestimmung von Modellen basierend auf gemessenen Daten. Dazu werden zunächst allgemeine Annahmen und Voraussetzungen eingeführt. Einige der klassischen Verfahren zur Systemidentifikation werden anschließend analysiert und die Vorgehensweise der Verfahren erläutert.

Das Kapitel schließt mit einer kurzen Zusammenfassung der in diesem Kapitel vorgestellten Themen. Die Bedeutung der betrachteten Themen für die folgenden Kapitel wird in einem kurzen Ausblick dargestellt.

2.1 Modelle dynamischer Systeme

Für die mathematische Beschreibung des Verhaltens dynamischer Systeme werden Modelle benötigt. Um eine Auswahl geeigneter Modelle für den geplanten Einsatzzweck zu treffen, ist es zunächst erforderlich, die charakteristischen Systemeigenschaften zu analysieren (vgl. [Buc10]). Eine grundlegende Möglichkeit zur Kategorisierung der Systeme ist die Anzahl der Ein- und Ausgangsgrößen. Im *Mehrgrößenfall* (MIMO, Multiple Input, Multiple Output) werden Systeme mit mehreren Eingangs- und mehreren Ausgangsgrößen betrachtet. Ein Spezialfall dieses allgemeinen Falls ist der *Eingrößenfall* (SISO, Single Input, Single Output), bei dem nur jeweils eine Eingangs- und Ausgangsgröße vorhanden ist. Für diese Arbeit spielt die Zwischenform der MISO-Systeme eine wichtige Rolle, nicht jedoch SIMO-Systeme, welche jeweils aus MIMO-Systemen durch Beschränkung auf eine Ausgangs- bzw. Eingangsgröße gebildet werden.

Systeme können weiterhin in *lineare* und *nichtlineare* Systeme unterteilt werden. Dabei stellt die Annahme eines linearen Systemverhaltens häufig eine Vernachlässigung nichtlinearer Effekte in einem begrenzten Gültigkeitsbereich des Modells dar. Häufig vorkommende Beispiele hierfür sind Haftreibungseffekte oder auch physikalische Beschränkungen. Wenn die Charakteristik der Reaktion eines Systems auf eine Eingangssignaländerung unabhängig vom Zeitpunkt des Auftretens der Änderung eintritt, ist das System *zeitinvariant*, ansonsten *zeitvariant*.

Eine Kombination dieser Eigenschaften führt zur Klasse der linearen, zeitinvarianten Systeme (LTI, Linear Time-Invariant), welche in dieser Arbeit betrachtet wird. Diese Systemklasse spielt in der Regelungstechnik eine wichtige Rolle, da ihr viele Systeme zumindest näherungsweise zugeordnet werden können und in vielen Bereichen ausgereifte Verfahren zur Verfügung stehen.

Die Schnittstellen zwischen Systemen und ihrer Umwelt weisen zeitkontinuierliche Signalverläufe auf. Modelle, die dieses Verhalten beschreiben, werden daher als *zeitkontinuierlich* bezeichnet. Wenn Modelle dagegen die Signalverläufe nur zu einzelnen Zeitpunkten abbilden, werden sie als *zeitdiskrete* Modelle bezeichnet. Dies liegt insbesondere bei Modellen vor, welche auf digitalen Prozessoren realisiert werden, oder beim Umgang mit gemessenen Daten. Meist werden Signale, z. B. $y(t)$, dabei zu äquidistanten Zeitpunkten $y(kT_a)$ mit der Abtastzeit $T_a \in \mathbb{R}^+$ und dem Zeitindex $k \in \mathbb{Z}$ betrachtet. In dieser Arbeit wird hierfür die abgekürzte Notation $y(k) := y(kT_a)$ verwendet.

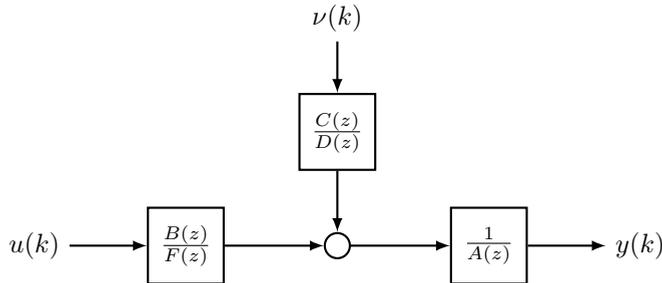


Abbildung 2.1: Aufbau des allgemeinen Eingangs-/Ausgangs-Modells

2.1.1 Modelle in Ein-/Ausgangsform

Für zeitdiskrete LTI-Systeme ist in [IM11; Lju99; Nel01; Sch09] eine allgemeine mathematische Beschreibung für den SISO-Fall angegeben:

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(z)}{F(z) \cdot A(z)}}_{\substack{\text{deterministischer Anteil,} \\ \text{Eingangsübertragungsfunktion}} \cdot u(k) + \underbrace{\frac{C(z)}{D(z) \cdot A(z)}}_{\substack{\text{stochastischer Anteil,} \\ \text{Störübertragungsfunktion}} \cdot \nu(k). \quad (2.1)$$

Dabei wird die Eingangsgröße mit $u(k)$ und die Ausgangsgröße mit $y(k)$ bezeichnet. Dieses allgemeine Modell besteht aus einem deterministischen und einem stochastischen Anteil. Die zugehörigen Polynome sind durch

$$A(z) = 1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{n_a} \cdot z^{-n_a}, \quad (2.2a)$$

$$B(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_{n_b} \cdot z^{-n_b}, \quad (2.2b)$$

$$C(z) = 1 + c_1 \cdot z^{-1} + \dots + c_{n_c} \cdot z^{-n_c}, \quad (2.2c)$$

$$D(z) = 1 + d_1 \cdot z^{-1} + \dots + d_{n_d} \cdot z^{-n_d}, \quad (2.2d)$$

$$F(z) = 1 + f_1 \cdot z^{-1} + \dots + f_{n_f} \cdot z^{-n_f} \quad (2.2e)$$

gegeben. In dieser Darstellung stellt z^{-1} den Verzögerungsoperator dar, also beispielsweise $z^{-1}y(k) = y(k-1)$. Das Signal $\nu(k)$ stellt eine unbekannte Störung des Systems dar, welche durch die Störübertragungsfunktion in Gleichung (2.1) gefiltert auf den Ausgang wirkt. Für technische Systeme wird dabei vorausgesetzt, dass der Grad des Nennerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Zählerpolynoms ist, um kausales Verhalten sicherzustellen. Da das Modell direkt die Eingangs- und Ausgangsgrößen verknüpft, wird es als Modell in Ein-/Ausgangsform bezeichnet, oder auch als Input-Output-Modell (IO-Modell).

Abkürzung	Name	verwendete Polynome
AR	Auto Regressive	$D(z)$
MA	Moving Average	$C(z)$
ARMA	Auto Regressive Moving Average	$C(z), D(z)$
ARX	Auto Regressive with eXogenous input	$A(z), B(z)$
ARMAX	Auto Regressive Moving Average with eXogenous input	$A(z), B(z), C(z)$
OE	Output Error	$B(z), F(z)$

Tabelle 2.1: Auswahl linearer Modelle zu Gleichung (2.1)

In Abbildung 2.1 ist eine schematische Darstellung dieses allgemeinen Modells dargestellt. Für praktische Anwendungen lassen sich aus dem allgemeinen Modell (2.1) verschiedene vereinfachte Modellformen bilden. Eine Übersicht einiger häufig eingesetzter Modelle ist in Tabelle 2.1 gegeben. Die im jeweiligen Modell nicht benötigten Polynome werden identisch eins gesetzt. Die ersten drei der angegebenen Modelle (AR, MA, ARMA) bestehen lediglich aus dem stochastischen Anteil, der deterministische Anteil wird nicht betrachtet. Als Eingang wird für diese Modelle das stochastische Signal $\nu(k)$ betrachtet. Gelegentlich wird dabei in der Literatur anstatt des Polynoms $D(z)$ das Polynom $A(z)$ verwendet, was für diese stochastischen Modelle implizit $u(k) \equiv 0 \forall k$ voraussetzt.

Im Folgenden wird exemplarisch das ARX-Modell vorgestellt, da es in dieser Arbeit häufig eingesetzt wird. Dazu wird die allgemeine Übertragungsfunktion (2.1) zu

$$A(z) \cdot y(k) = B(z) \cdot u(k) + \nu(k) \quad (2.3)$$

vereinfacht, wobei hier zunächst der SISO-Fall betrachtet wird. Die Polynome $A(z)$ und $B(z)$ werden entsprechend der Gleichungen (2.2a) und (2.2b) verwendet. Dieses Modell kann zur Prädiktion des Ausgangs im nächsten Abtastschritt verwendet werden, indem der deterministische Anteil des Modells betrachtet wird (vgl. z. B. [Lju99; Nel01; Sch09]):

$$\hat{y}(k|k-1) = B(z)u(k) + (1 - A(z))y(k). \quad (2.4)$$

Mittels dieser Prädiktion kann der Prädiktionsfehler $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ des Modells gebildet werden:

$$e(k) = A(z)y(k) - B(z)u(k). \quad (2.5)$$

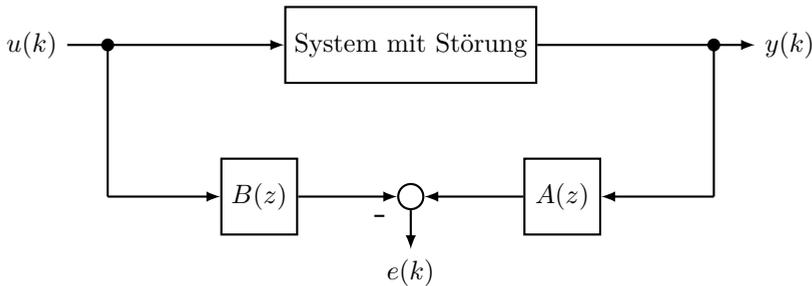


Abbildung 2.2: Struktur des Gleichungsfehlers im ARX-Modell

Bei diesem Fehler handelt es sich um einen Gleichungsfehler, was in Abbildung 2.2 deutlich wird. Das ARX-Modell gehört somit zur Klasse der *Gleichungsfehlermodelle*, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass sowohl im deterministischen wie auch im stochastischen Anteil der Übertragungsfunktion (2.1) ein gemeinsamer Anteil $\frac{1}{A(z)}$ enthalten ist. Die Störung $\nu(k)$ greift dabei so im System an, dass sie durch die Übertragungsfunktion $\frac{1}{A(z)}$ gefiltert auf den Ausgang $y(k)$ wirkt.

Gleichung (2.4) kann alternativ als Differenzgleichung im Zeitbereich angegeben werden:

$$\hat{y}(k|k-1) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + b_0 u(k). \quad (2.6)$$

Dabei gilt, wie beim allgemeinen IO-Modell, $n_a \geq n_b$. In dieser Arbeit wird die Ordnung der beiden Systemanteile ohne Beschränkung der Allgemeinheit als identisch angenommen, also $n_{\text{ARX}} = n_a = n_b$. Falls diese Annahme für ein betrachtetes System nicht zutrifft, sind die Parameter $b_i = 0$ für alle $n_b < i < n_{\text{ARX}}$. Der letzte Term $b_0 u(k)$ in Gleichung (2.6) beschreibt einen optional vorhandenen Durchgriff von $u(k)$ auf $y(k)$, was zu einem sprungfähigen System führt. Wenn die Parameter in Gleichung (2.6) zu

$$\vartheta = (a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad b_0 \quad \cdots \quad b_{n_b})^T \quad (2.7)$$

zusammengefasst werden, kann die Gleichung (2.6) mit dem Regressor

$$\varphi(k) = (-y(k-1) \quad \cdots \quad -y(k-n_a) \quad u(k) \quad \cdots \quad u(k-n_b))^T \quad (2.8)$$

als lineares Gleichungssystem

$$\hat{y}(k|k-1) = \varphi^T(k)\vartheta \quad (2.9)$$

geschrieben werden.

Das ARX-Modell kann für den MISO-Fall erweitert werden, falls mehrere Eingangssignale vorhanden sind. Die Modellgleichung in Prädiktionsform

$$\hat{y}(k|k-1) = - \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k) \quad (2.10)$$

unterscheidet sich von Gleichung (2.6) durch vektorielle Parameter \mathbf{b}_i . Die verschiedenen Eingangssignale werden zu einem vektoriellen Eingangssignal $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ zusammengefasst. Auch für den MIMO-Fall kann das ARX-Modell erweitert werden:

$$\hat{\mathbf{y}}(k|k-1) = - \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{A}_i \mathbf{y}(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k-i) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(k). \quad (2.11)$$

Die Größen $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ und $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ stellen die Parametermatrizen des Systems dar. Analog zum MISO-Fall werden nun die Ausgangsgrößen zu Vektoren $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ zusammengefasst. In den Parametermatrizen \mathbf{A}_i des AR-Systemanteils sind auch Kopplungen zwischen verschiedenen Ausgangsgrößen enthalten, welche durch die Matrixelemente $a_{i,j}$ mit $i \neq j$ beschrieben werden. Im Gegensatz zum SISO- und MISO-Fall ist das MIMO-ARX-Modell nicht eindeutig, da Kopplungen zwischen verschiedenen Ausgängen bestehen können. Es kann mehrere Modelle gleicher oder auch unterschiedlicher Modellordnung geben, die dasselbe Ein-/Ausgangsverhalten eines Systems beschreiben.

In der Literatur existieren verschiedene Definitionen dieser Modellform, welche sich insbesondere hinsichtlich der deterministischen und stochastischen Einflussgrößen unterscheiden. Die hier angegebene Definition des ARX-Modells wird in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit auch für Systeme mit mengenbasierten Unsicherheiten genutzt, wie dies auch in der Literatur (vgl. z. B. [CGV11; CGV12]) geschieht.

2.1.2 Zustandsraummodelle

Eine andere Möglichkeit zur Beschreibung dynamischer Systeme ist die *Zustandsraumdarstellung*. Für den zeitkontinuierlichen Fall wird dabei die Differenzialgleichung n -ter Ordnung des Systems in n Differenzialgleichungen erster Ordnung zerlegt [Buc10; IM11; Lun08a; Lun08b]. Im zeitdiskreten Fall werden anstatt der Differen-

zialgleichungen Differenzgleichungen betrachtet. Das Zustandsraummodell eines zeitdiskreten LTI-Systems wird durch

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\psi}(k), \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{F}\boldsymbol{\psi}(k) \quad (2.12b)$$

geschrieben. Dabei bezeichnet $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ den *Zustandsvektor* und n die Ordnung des Systems. Die *Systemmatrix* (oder auch *Dynamikmatrix*) $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschreibt dabei die freie Bewegung des Systems und entspricht somit dem AR-Anteil der IO-Modelle. Die erzwungene Bewegung des Systems und damit die Wirkung der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ wird durch die *Eingangsmatrix* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ beschrieben. Die *Ausgangsmatrix* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ und die optional vorhandene *Durchgriffmatrix* (auch *Durchgangsmatrix*) $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ beschreiben, wie die Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ vom Zustand und den Eingangsgrößen im aktuellen Abtastschritt k abhängen. Gleichung (2.12a) wird *Zustandsgleichung* genannt, Gleichung (2.12b) *Ausgangsgleichung*. Die Störung wird beim Zustandsraummodell häufig in die zwei Anteile *Prozessrauschen* $\boldsymbol{\psi}(k)$ und *Messrauschen* $\boldsymbol{\xi}(k)$ aufgeteilt [Buc10], wobei durch die Matrix \mathbf{F} eine Korrelation der Störungen von System- und Ausgangsgleichung hergestellt wird.

Ein dynamisches System wird als *vollständig steuerbar* [Lun08b] bezeichnet, wenn es durch eine passend gewählte Eingangsfolge $\mathbf{u}(k)$, $0 < k < k_e < \infty$ von jedem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ in einen beliebigen gewünschten Endzustand $\mathbf{x}(k_e)$ überführt werden kann. Wenn aus dem bekannten Verlauf der Eingangs- und Ausgangsfolge $\mathbf{u}(k)$ bzw. $\mathbf{y}(k)$, $0 < k < k_e < \infty$ auf den Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ geschlossen werden kann, wird das System als *vollständig beobachtbar* bezeichnet. Diese Eigenschaften können für Zustandsraummodelle überprüft werden, indem beispielsweise die von Rudolf E. Kálmán eingeführten Kriterien angewandt werden [Lun08b]. Dazu wird der Rang der Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = (\mathbf{H} \quad \mathbf{\Phi}\mathbf{H} \quad \dots \quad \mathbf{\Phi}^{n-1}\mathbf{H}) \quad \text{bzw.} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{Q}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{\Phi}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.13b)$$

untersucht, und das Zustandsraummodell bei vollem Rang als vollständig steuerbar bzw. vollständig beobachtbar bezeichnet. Alternativ zu diesem Kriterium ist eine Überprüfung durch die Kriterien von Elmer G. Gilbert oder Malo L.J. Hautus möglich [Lun08b]. Wenn ein Zustandsraummodell sowohl vollständig steuerbar als auch vollständig beobachtbar ist, handelt es sich um eine *Minimalrealisierung*. Es gibt dann kein Zustandsraummodell geringerer Ordnung, welches dasselbe Systemverhalten beschreibt.

Ein wesentlicher Vorteil der Zustandsraumdarstellung gegenüber IO-Modellen ist, dass durch die Zerlegung des Systems in einzelne Zustandsgrößen ein Einblick in die inneren Abläufe des Systems ermöglicht wird. Durch Zustandsraummodelle können selbst Abläufe beschrieben werden, die nicht durch die Eingangsgrößen beeinflusst werden können oder keine Auswirkung auf die Ausgangsgrößen haben.

Die Zustandsraumdarstellung eines Systems ist dabei nicht eindeutig. Es gibt unendlich viele Zustandsraummodelle gleicher Ordnung, die dasselbe Systemverhalten beschreiben und durch eine feste Wahl der Zustandsgrößen definiert sind (*Isomorphismus* der Zustandsraumdarstellung, vgl. [Buc10; Lun08b]). Zwischen unterschiedlichen Realisierungen ist eine Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}, \quad \tilde{\Phi} = \mathbf{T}^{-1}\Phi\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (2.14)$$

mit einer regulären Transformationsmatrix $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ möglich. Damit ist es möglich, Modelle in eine Form zu transformieren, die für die geplante Anwendung vorteilhaft ist. Eine in dieser Arbeit verwendete Form für SISO-Systeme ist die Beobachtungsnormalform (BNF):

$$\Phi_B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{c}_B^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1), \quad d = b_n. \quad (2.15b)$$

Eine Transformation in diese Darstellung ist nur für vollständig beobachtbare Systeme möglich. Die Parameter a_i und b_i entsprechen den Koeffizienten der Differenzgleichung des Systems, wodurch diese Darstellung sehr einfach aufgestellt werden kann. Analog hierzu kann auch eine Regelungsnormalform (RNF) für vollständig steuerbare Systeme angegeben werden [Lun08a]. In [IM11] ist eine mögliche Erweiterung von BNF und RNF auf MIMO-Systeme angegeben.

2.1.3 Umrechnung verschiedener Modellformen

Von den in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Modellen sind die Zustandsraummodelle weiter verbreitet, weshalb für diese eine große Zahl von ausgereiften Verfahren und Methoden existiert. Im Folgenden wird ein Zusammenhang zwischen den Modellen hergestellt, um diese Verfahren auch für Modelle in Ein-/Ausgangsform nutzbar zu machen. Dabei beschränkt sich dieser Abschnitt auf die für diese Arbeit relevante Umrechnung von ARX-Modellen in den Zustandsraum.

Für SISO-Systeme ist die Umrechnung zwischen ARX- und Zustandsraummodell direkt mittels der BNF (2.15) möglich, welche die Koeffizienten a_i und b_i der Differenzengleichung enthält. Dies ist möglich, da das ARX-Modell im SISO-Fall eindeutig definiert ist und die minimalen Ordnungen der beiden Beschreibungsformen identisch sind, also $n = n_{\text{ARX}}$. Im Mehrgrößenfall kann jedoch die Ordnung des ARX-Modells kleiner sein als die minimale Ordnung eines Zustandsraummodells für dasselbe System. Die im Folgenden vorgestellte Umrechnung wurde vorab in [ZBD14b] veröffentlicht. In [GD12] wird eine Alternative hierzu vorgestellt und auch die Umrechnung vom Zustandsraum zum IO-Modell beschrieben.

Die Umrechnung vom ARX-Modell (2.11) in die Zustandsraumdarstellung (2.12) geschieht mit einer Erweiterung der BNF für den Mehrgrößenfall. Zunächst werden jedoch die skalaren Parameter $a_{i,j,k}$ und $b_{i,j,k}$ in den Parametermatrizen des ARX-Modells (2.11) näher betrachtet. Die verwendete Indizierung ist dabei so gewählt, dass die Verknüpfung zwischen den Ein- und Ausgängen verdeutlicht wird:

1. Index (i): Nummer des beeinflussten Ausgangs (Ziel),
2. Index (j): Nummer des beeinflussenden Ein- bzw. Ausgangs (Quelle),
3. Index (k): Zeitliche Verzögerung der Auswirkung (Anzahl z^{-1} -Glieder).

Der Parameter $b_{1,2,3}$ beschreibt beispielsweise den Einfluss des um drei Abtast Schritte verzögerten zweiten Eingangs auf den ersten Ausgang des ARX-Modells.

Diese Parameter werden nun zu Blockmatrizen zusammengefasst, wobei für die Blockmatrizen dasselbe Indizierungsschema (ohne die zeitlichen Verschiebungen) verwendet wird. Damit ergeben sich die Matrizen des Zustandsraummodells (2.12) zu:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta_{1,1} & \Psi_{1,2} & \cdots & \Psi_{1,n_y} \\ \Psi_{2,1} & \Theta_{2,2} & \cdots & \Psi_{2,n_y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{n_y,1} & \Psi_{n_y,2} & \cdots & \Theta_{n_y,n_y} \end{pmatrix}, \quad (2.16a)$$

$$H = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{1,1} & \cdots & \mathbf{h}_{1,n_u} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{h}_{n_y,1} & \cdots & \mathbf{h}_{n_y,n_u} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{c}^T \end{pmatrix}. \quad (2.16b)$$

Der Durchgriff ergibt sich, sofern vorhanden, zu:

$$D = \begin{pmatrix} b_{1,1,0} & \cdots & b_{1,n_u,0} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n_y,1,0} & \cdots & b_{n_y,n_u,0} \end{pmatrix}. \quad (2.16c)$$

Die Blockmatrizen $\Theta_{i,i}$ auf der Hauptdiagonalen der Systemmatrix Φ entsprechen jeweils der Systemmatrix eines SISO-Modells in BNF und beschreiben die AR-Dynamik jedes einzelnen Ausgangs. Sie sind durch

$$\Theta_{i,i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{i,i,p} \\ 1 & \dots & 0 & -a_{i,i,p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{i,i,1} \end{pmatrix} \quad (2.17a)$$

gegeben. Die verbleibenden Matrizen $\Psi_{i,j}$ beschreiben die Kopplung zwischen den einzelnen Teilsystemen:

$$\Psi_{i,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -a_{i,j,p} \\ \mathbf{0}^T & -a_{i,j,p-1} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & -a_{i,j,1} \end{pmatrix}. \quad (2.17b)$$

Die Elemente der Eingangsmatrix H sind durch

$$\mathbf{h}_{i,j} = \begin{pmatrix} b_{i,j,p} \\ b_{i,j,p-1} \\ \vdots \\ b_{i,j,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{i,1,p} & \dots & -a_{i,n_y,p} \\ -a_{i,1,p-1} & \dots & -a_{i,n_y,p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{i,1,1} & \dots & -a_{i,n_y,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j,0} \\ b_{2,j,0} \\ \vdots \\ b_{n_y,j,0} \end{pmatrix} \quad (2.17c)$$

gegeben, wobei der zweite Summand nur im Falle eines Durchgriffs vorhanden ist ($b_{i,j,0} \neq 0$). Die Ausgangsmatrix in Gleichung (2.16b) setzt sich aus den Vektoren

$$\mathbf{c}^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \quad (2.17d)$$

zusammen, was bedeutet, dass n_y Zustände direkt messbar sind. Bei dieser Umwandlung des ARX-Modells in ein Zustandsraummodell resultiert im Allgemeinen keine Minimalrealisierung eines Systems. Hintergrund ist, dass für jeden Ausgang des Systems Blockmatrizen gleicher Dimension verwendet werden. Wenn jedoch beispielsweise entkoppelte Teilsysteme unterschiedlicher Ordnung vorliegen, führt dies im Allgemeinen zu einer zusätzlichen Erhöhung der Ordnung.

Zur Verdeutlichung des Zusammenhangs ist in Abbildung 2.3 ein Beispielsystem dargestellt. Es handelt sich um ein ARX-Modell dritter Ordnung mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. Im Zustandsraum lässt sich dies mit dem hier vorgestellten Zusammenhang als Modell sechster Ordnung darstellen.

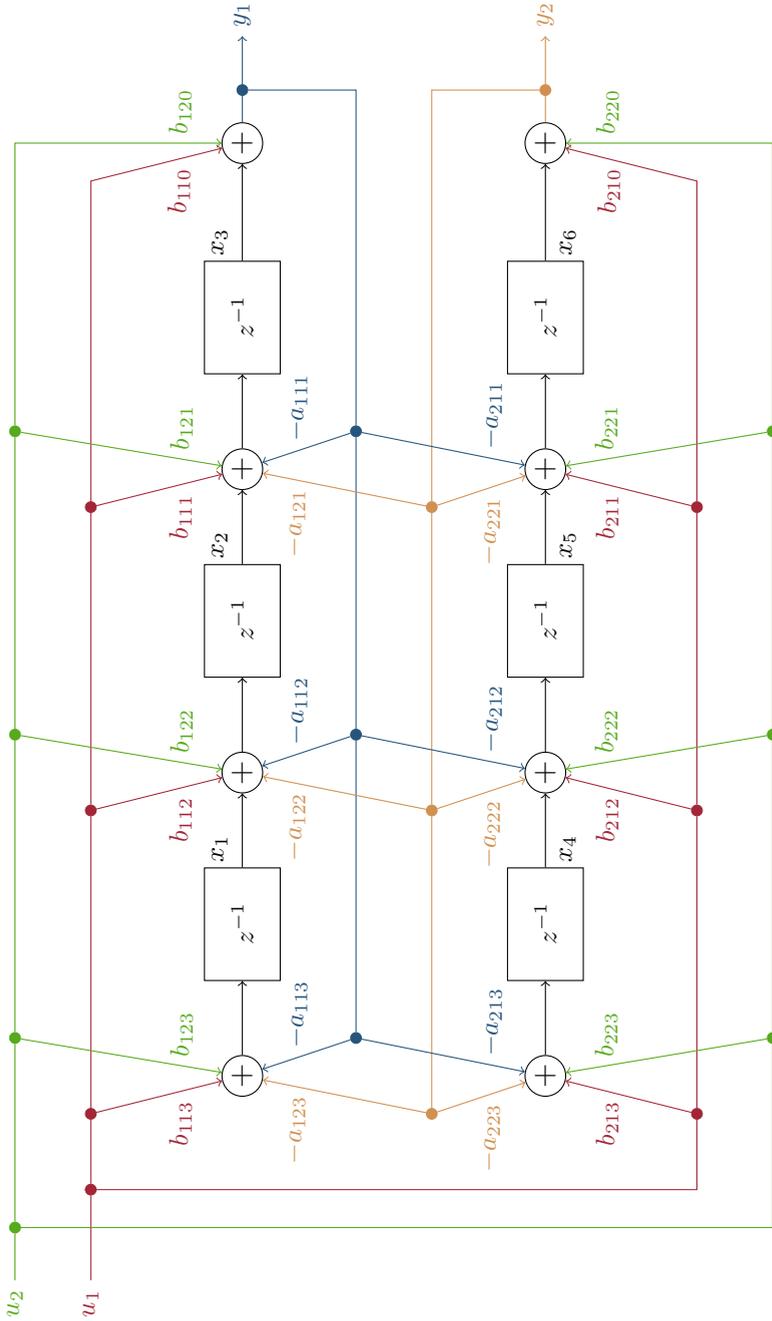


Abbildung 2.3: Struktur eines Beispiel-ARX-Modells ($n_{\text{ARX}} = 3$, $n_u = 2$, $n_y = 2$) in erweiterter BNF

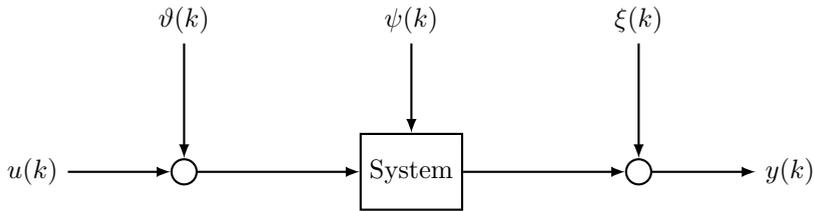


Abbildung 2.4: Wirkung verschiedener Störungen auf ein System

2.2 Beschreibung von Unsicherheiten

Die im vorherigen Abschnitt 2.1 vorgestellten Modelle beschreiben das Verhalten eines Systems, welches durch zusätzliche Unsicherheiten bzw. Störungen überlagert wird. Die drei am häufigsten anzutreffenden Arten von Unsicherheiten sind die *Eingangsunsicherheit* ϑ , die *Prozessunsicherheit* ψ sowie die *Messunsicherheit* ξ .

Die Eingangsunsicherheit beschreibt dabei Abweichungen zwischen der angenommenen Eingangsgröße (beispielsweise von der Regelung vorgegeben) und der tatsächlich auf das System wirksamen Eingangsgröße. Mögliche Ursachen hierfür sind u. a. Stellungenauigkeiten der eingesetzten Aktorik oder Störungen der Sollwertübertragung. Diese Unsicherheit beeinflusst dabei das Verhalten des Systems, da dieses auch auf die Störung der Eingangsgrößen reagiert. Als Messunsicherheit ξ wird die Unsicherheit der eingesetzten Sensorik zur Signalerfassung sowie der unmittelbar damit zusammenhängenden Signalverarbeitung betrachtet. Dadurch ändert sich das Systemverhalten nicht, lediglich die Wahrnehmung des Verhaltens wird verändert.

Im Gegensatz zu diesen beiden Unsicherheiten, welche nur außerhalb des tatsächlichen Systems auftreten, beeinflusst die Prozessunsicherheit direkt das Verhalten des Systems. Mögliche Ursachen für diese Störung sind beispielsweise Einkopplung externer Einflussfaktoren wie elektromagnetischer Strahlung oder auch die Alterung von Bauteilen. Bei der Modellierung eines Systems werden auftretende Modellfehler und -ungenauigkeiten oft ebenfalls als Prozessunsicherheit interpretiert.

In Abbildung 2.4 ist die Wirkung der drei Unsicherheitsarten auf ein System nochmals verdeutlicht. Dabei können die Unsicherheiten nicht nur direkt an den jeweiligen Stellen auftreten, sondern auch durch zusätzliche statische oder dynamische Systemteile gefiltert. Im Allgemeinen sind die auf ein System wirkenden Störungen unbekannt und nicht messbar. Daher werden Möglichkeiten benötigt, die Wirkung dieser Unsicherheiten auf das System abzuschätzen und als Modell abzubilden.

Zur Beschreibung der charakteristischen Eigenschaften der Unsicherheit gibt es verschiedene Möglichkeiten, abhängig von vorhandenen Informationen über die Art der Störung. In den folgenden Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 werden die zwei gebräuchlichsten Beschreibungsformen vorgestellt, wobei der Schwerpunkt auf den in dieser Arbeit eingesetzten mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibungsformen (Abschnitt 2.2.2) liegt. Die beiden Beschreibungsformen sind dabei nicht als konkurrierende Ansätze zu betrachten, da sie auf unterschiedlichen Voraussetzungen basieren und auch eine unterschiedliche Zielsetzung verfolgen. Ergänzend ist in der Literatur (z. B. [Pla07]) eine Beschreibungsform für Störungen mit beschränkter Signalenergie (engl. energy-bounded) bekannt, welche in dieser Arbeit nicht betrachtet wird.

2.2.1 Stochastische Unsicherheitsbeschreibung

Eine häufig gewählte Möglichkeit zur Beschreibung von Unsicherheiten beruht auf der Annahme eines stochastischen Prozesses. Wenn das Leistungsdichtespektrum des stochastischen Prozesses (zumindest im relevanten Frequenzbereich) konstant ist, spricht man von *weißem Rauschen*. Dabei wird die Störung als Zufallsvariable angenommen, welche einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF, Probability Density Function) folgt. Meist kommt dabei die Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (2.18)$$

auch Gauß-Verteilung genannt, mit Erwartungswert (erstes Moment) μ und Varianz (zweites zentrales Moment) σ^2 zur Beschreibung der PDF zum Einsatz, aber auch andere Verteilungen, wie beispielsweise die Gleichverteilung oder die Poisson-Verteilung, werden gelegentlich eingesetzt.

Die stochastische Unsicherheitsbeschreibung ist im Bereich der Systemtheorie weit verbreitet, da sie intensiv erforscht wurde und eine Vielzahl an Verfahren zum Umgang mit derartigen Unsicherheiten vorliegen. Eine ausführlichere Vorstellung der zugrunde liegenden Methoden ist zum Beispiel in [Unb09; Unb98] oder [IM11] sowie den darin angegebenen Quellen zu finden. Voraussetzung für diese Beschreibungsform ist jedoch immer, dass Informationen zur PDF bekannt sind, da diese einen großen Einfluss auf die zur Verfügung stehenden Verfahren und Methoden hat. Ist die PDF nicht bekannt, wird für viele Anwendungen eine Normalverteilung angenommen. Bei der Anwendung der stochastischen Unsicherheitsbeschreibung sind die Rechenergebnisse ebenfalls durch Wahrscheinlichkeiten beschrieben, sodass zur Entscheidungsfindung ein passendes Konfidenzniveau gewählt werden muss.

2.2.2 Mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibung

Eine andere Herangehensweise wird bei der *mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung* (engl. set-membership) verfolgt. Bei diesem Ansatz wird zu jedem Abtastpunkt die Menge aller möglichen Störungen anstelle eines konkreten Wertes der Unsicherheit betrachtet, also $\nu(k) \in \mathcal{V}(k)$. Dabei wird keine Kenntnis über die Verteilung der Unsicherheit ν innerhalb der betrachteten Wertemenge \mathcal{V} , also keine PDF, benötigt. Alle in der Menge der möglichen Störungen enthaltenen Werte sind zu jedem Abtastpunkt gleichwertig. Daher wird diese Vorgehensweise in der Literatur (z. B. [MNPW96; Pla07]) auch als Beschreibung durch *unbekannte, aber beschränkte Fehler* (engl. UBB, Unknown But Bounded) bezeichnet. Durch konsequente Rechnung mit der kompletten Wertemenge \mathcal{V} ist es möglich, trotz unbekannter Störung garantierte Aussagen zum Systemverhalten zu treffen. Dies stellt einen wesentlichen Unterschied zur stochastischen Beschreibungsform dar.

Problematisch sind dabei unbegrenzte Unsicherheitsmengen, da sich daraus keine Information entnehmen lässt. Somit ist die praktische Anwendbarkeit im Allgemeinen auf Störungen begrenzt, die einer stark begrenzten Menge zugeordnet werden können. Diese Annahme liegt, wie in der Literatur üblich (z. B. [MNPW96]), auch dieser Arbeit zu Grunde. Als Beispiel für die mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibung kann ein Sensor genannt werden, dessen Hersteller lediglich Grenzen für den Messfehler spezifiziert. Häufig kommt diese Form der Unsicherheitsbeschreibung auch dann zum Einsatz, wenn für komplexe Systeme keine ausreichende Datensatzlänge vorhanden ist, um daraus auf die PDF der Unsicherheit schließen zu können.

Im Allgemeinen kann die betrachtete Wertemenge \mathcal{V} eine komplizierte Form annehmen, was die Handhabung dieser Mengen erschwert. Daher wurden schon früh Verfahren entwickelt, um die komplexe Form der Unsicherheitsmengen durch einfachere geometrische Formen einzuschließen. Durch diesen Einschluss $\tilde{\mathcal{V}} \supseteq \mathcal{V}$ kann der Rechenaufwand reduziert werden, allerdings wirkt sich diese Überabschätzung auch auf die Genauigkeit des Rechenergebnisses aus. Durch den Einschluss werden zusätzlich zu den Werten der ursprünglichen Unsicherheitsmenge weitere Werte beschrieben, die nicht Teil der Lösung sind und somit zu einer Überapproximation der Unsicherheitsmenge führen. In der Literatur (z. B. [JKDW01; Wol10; Xio13]) wird dies als *Einhüllungs-Effekt* (engl. Wrapping-Effekt) bezeichnet. An der Möglichkeit, garantierte Aussagen zu treffen, ändert sich dadurch nichts, da immer alle Werte der Lösungsmenge auch in der einschließenden Menge enthalten sind. In den folgenden Abschnitten werden die gebräuchlichsten Einschlussformen zur mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung vorgestellt.

Unsicherheitsbeschreibung durch Intervalle

Der Ursprung für die Unsicherheitsbeschreibung durch Intervalle wird heute an dem Buch *Interval Analysis* [Moo66] festgemacht, da darin die früheren Erkenntnisse beispielsweise aus [Moo62; MY59; Sun58; War56] verallgemeinert und somit allgemein anwendbar wurden. Erste Arbeiten gehen jedoch schon bis zu Archimedes ins dritte Jahrhundert vor Christus zurück. Eine Übersicht der historischen Entwicklung des Einsatzes von Intervallen ist zum Beispiel in [MKC09] enthalten. Die im Folgenden präsentierte Einführung zu Intervallen basiert auf [Wol10] und [MKC09].

Die Grundidee des Einsatzes von Intervallen zur Unsicherheitsbeschreibung basiert auf der Annahme von festen oberen und unteren Schranken für die Unsicherheit in jedem Abtastpunkt. Diese Arbeit beschränkt sich dabei, wie in der Literatur üblich, auf abgeschlossene Intervalle. Damit wird ein Intervall durch

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}] := \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (2.19)$$

definiert, die Menge aller reellen Intervalle wird mit \mathbb{IR} bezeichnet. Die untere Schranke $\underline{x} = \inf([x])$ wird als *Infimum*, die obere Schranke $\bar{x} = \sup([x])$ als *Supremum* bezeichnet. Spezialfälle stellen das *Punktintervall*, bei dem die obere und untere Schranke identisch sind, also $[x] = \underline{x} = \bar{x} = x$, sowie das leere Intervall \emptyset dar. In dieser Arbeit wird der Begriff *reellwertig* synonym zu Punktintervallen verwendet, da Intervalle mit komplexen Zahlen hier nicht betrachtet werden. Alternativ zur Definition mittels Schranken können nichtleere Intervalle auch durch ihren *Mittelpunkt*

$$x_m = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2} \quad (2.20)$$

und ihren *Intervallradius*

$$x_\Delta = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (2.21)$$

definiert werden, sodass

$$[x] = [x_m - x_\Delta, x_m + x_\Delta]. \quad (2.22)$$

Der doppelte Intervallradius wird auch als *Intervallbreite* bezeichnet. Weiterhin kann die *Größe* eines Intervalls

$$\text{mag}([x]) = \left| [x] \right| := \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|) \quad (2.23)$$

definiert werden, was auch als *Betrag* bezeichnet wird. Dabei gilt für den Betrag

$$|x| \leq \left| \lfloor x \rfloor \right| \quad \forall x \in [x]. \quad (2.24)$$

Da es sich bei Intervallen um Mengen handelt, können darauf Mengenoperationen angewandt werden. Der *Schnitt* zweier Intervalle ist durch

$$[x] \cap [y] = \begin{cases} [\max(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})], & \text{falls } \bar{x} \geq \underline{y} \text{ und } \underline{x} \leq \bar{y} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.25)$$

definiert. Die leere Menge \emptyset bedeutet dabei, dass es keine Lösung gibt, falls die Intervalle nicht überlappen. Dabei wird die leere Menge als beschränkte Menge betrachtet. Schwieriger ist die Definition der *Vereinigung* $[x] \cup [y]$ zweier Intervalle, da diese nur für den Fall überlappender Intervalle zu einem Intervall führt und andernfalls eine Lücke besteht. Stattdessen kann die *Hülle*

$$[x] \cup [y] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})] \quad (2.26)$$

um beide Intervalle eingesetzt werden, welche allerdings durch den Einschluss der Lücke gegebenenfalls zu einer Überapproximation führt. Weiterhin können verschiedene Relationen zwischen Intervallen betrachtet werden, welche in Tabelle 2.2 angegeben sind.

Die grundlegenden arithmetischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division können durch die Operationen auf den Intervallschranken

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (2.27a)$$

$$-[x] = [-\bar{x}, -\underline{x}], \quad (2.27b)$$

$$[x] \cdot [y] = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}], \quad (2.27c)$$

$$\frac{1}{[x]} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } [x] = [0, 0], \\ [\frac{1}{\bar{x}}, \frac{1}{\underline{x}}] & \text{falls } 0 \notin [x], \\ [\frac{1}{\bar{x}}, \infty) & \text{falls } [x] = [0, \bar{x}], \\ (-\infty, \frac{1}{\underline{x}}] & \text{falls } [x] = [\underline{x}, 0], \\ (-\infty, \infty) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.27d)$$

mit geringem Aufwand berechnet werden. Dabei gelten für Addition und Multiplikation das Kommutativitäts- und Assoziativitätsgesetz, nicht jedoch das Distributivi-

Bezeichnung	Notation	Berechnung
Gleichheit	$[x] = [y]$	$\underline{x} = \underline{y}$ und $\bar{x} = \bar{y}$
Teilmenge	$[x] \subseteq [y]$	$\underline{x} \geq \underline{y}$ und $\bar{x} \leq \bar{y}$
echte Teilmenge	$[x] \subset [y]$	$\underline{x} > \underline{y}$ und $\bar{x} < \bar{y}$
kleiner	$[x] < [y]$	$\bar{x} < \underline{y}$
kleiner oder gleich	$[x] \leq [y]$	$\bar{x} \leq \underline{y}$

Tabelle 2.2: Relationen zwischen Intervallen

tätsgesetz. Stattdessen wird im Allgemeinen die schwächere Subdistributivität

$$[x] \left([y] + [z] \right) \subseteq [x] [y] + [x] [z] \quad (2.28)$$

betrachtet. Hinzu kommt, dass für Addition und Multiplikation von Intervallen, außer für den Spezialfall eines Punktintervalls, kein inverses Element existiert.

Diese Rechenoperationen können wie im klassischen reellwertigen Fall auch auf Vektoren und Matrizen erweitert werden. Dabei ist ein Intervallvektor $[x] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ bzw. eine Intervallmatrix $[X] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{m \times n}$ ein Vektor bzw. eine Matrix mit Intervallen als Elemente, welche auch Punktintervalle sein können. Ein n -dimensionaler Intervallvektor kann als n -dimensionaler Hyperquader interpretiert werden, was in zwei Dimensionen einem Rechteck und in drei Dimensionen einem Quader entspricht. In dieser Arbeit werden solche Hyperquader unabhängig von Ihrer Dimension als *Box* bezeichnet. Die Kanten der Box sind dabei immer parallel zu den Achsen des Koordinatensystems ausgerichtet. Dadurch kann eine Überapproximation entstehen, welche sich für die Anwendung der Intervalle nachteilig auswirken kann. In Abbildung 2.5 sind eine zwei- und eine dreidimensionale Box als Beispiel dargestellt.

Beim Umgang mit intervallarithmetischen Operationen ist zu beachten, dass alle vorkommenden Variablen als unabhängige Größen betrachtet werden. Mehrfach vorkommende Größen werden nicht verknüpft, sondern können unabhängig voneinander in ihrem kompletten Wertebereich variieren. Dies führt in Abhängigkeit von der Formulierung der Rechnung zu einer Überschätzung des Ergebnisses und wird als *Abhängigkeits-Effekt* (engl. Dependency-Effekt) [JKDW01; Xio13] bezeichnet. Wenn beispielsweise der Ausdruck $y = x^2 + 4x + 4$ mit dem Intervall $x = [-3, 1]$ berechnet

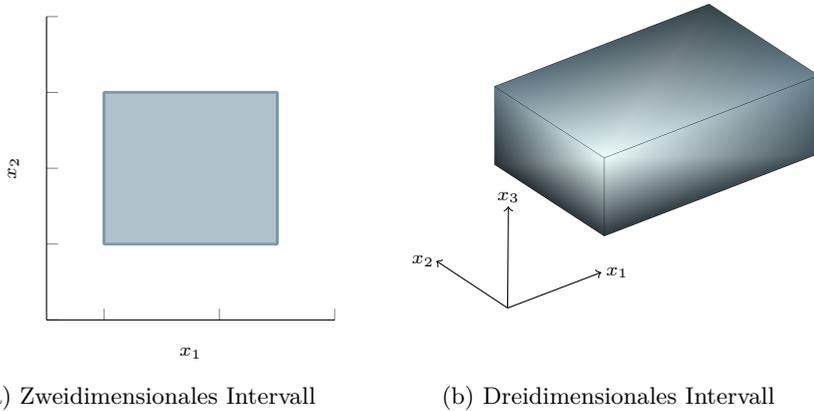


Abbildung 2.5: Beispiele für mehrdimensionale Intervalle

wird, können die verschiedenen Formulierungen

$$[y] = [x]^2 + 4[x] + 4 = [-8, 17], \quad (2.29a)$$

$$[y] = ([x] + 2) ([x] + 2) = [-3, 9], \quad (2.29b)$$

$$[y] = ([x] + 2)^2 = [0, 9] \quad (2.29c)$$

angegeben werden, welche alle zu unterschiedlich engen Einschlüssen der tatsächlichen Lösung $[0, 9]$ führen. Daher sollte, sofern möglich, eine Formulierung der Berechnungsvorschrift eingesetzt werden, die so faktorisiert ist, dass jede Größe nur einmal vorkommt.

Eine wichtige Eigenschaft von Intervallmatrizen ist ihr Rang. In Kapitel 4 wird diese Eigenschaft bei der Untersuchung der Intervalldaten zur Bestimmung der Modellordnung benutzt. Der Rang definiert sich gemäß

$$\text{rang}([\mathbf{A}]) := \min_r \left\{ r \mid \forall r = \text{rang}(\mathbf{A}), \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \right\} \quad (2.30)$$

als minimaler Rang aller reellwertigen Matrizen \mathbf{A} , die in der Intervallmatrix $[\mathbf{A}]$ enthalten sind. Anschaulich betrachtet entspricht der Rang somit der minimalen Anzahl von linear unabhängigen Zeilen und Spalten aller durch $[\mathbf{A}]$ beschriebenen Punktmatrizen. Die Definition (2.30) kann analog auch für den Zeilenrang $\text{zrang}(\cdot)$ und Spaltenrang $\text{srang}(\cdot)$ übertragen werden. Die Bestimmung des Rangs einer Intervallmatrix lässt sich nicht einfach durchführen, selbst die Überprüfung auf

vollen Rang einer Intervallmatrix stellt ein *NP-schweres* Problem dar [Roh12; Sha14]. In [Roh12] wird jedoch eine Kombination der Bedingungen

$$\text{rang}(\mathbf{A}_m) = n \quad \text{und} \quad (2.31a)$$

$$\rho \left(\left| \left(\mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_m \right)^{-1} \mathbf{A}_m^T \middle| \mathbf{A}_\Delta \right. \right) < 1 \quad (2.31b)$$

als hinreichendes Kriterium für vollen Spaltenrang vorgestellt, wobei $\rho(\cdot)$ den *Spektralradius*¹ $\rho(\cdot) = \max_i |\lambda_i(\cdot)|$ einer (reellwertigen) Matrix beschreibt. In [Sha14] werden als Ergänzung hierzu weitere hinreichende Kriterien für vollen Rang vorgestellt. Ein Kriterium basiert auf der Betrachtung von Singulärwerten der Mittelpunkts- und Radiusmatrix:

$$\max_i (\sigma_i(\mathbf{A}_\Delta)) > \min_i (\sigma_i(\mathbf{A}_m)) \quad \forall i = 1 \dots n. \quad (2.32)$$

Ein weiteres Kriterium für Intervallmatrizen $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ basiert auf der Betrachtung von *Betragsnormen*² (engl. absolute norm, definiert durch: $\|[\mathbf{A}]\| = \|\mathbf{A}\|$, vgl. [FRL11]), die durch Vektornormen definiert sind. Bei der *Spaltensummennorm* $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$, der *Zeilensummennorm* $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$ oder der *Frobenius-Norm* $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{i,j}^2}$ handelt es sich um solche Betragsnormen. Das Kriterium für vollen Spaltenrang mit diesen Normen lautet:

$$\text{rang}(\mathbf{A}_m) = n \quad \text{und} \quad (2.33a)$$

$$\|\mathbf{A}_\Delta\| < \left\| \mathbf{A}_m^\dagger \right\|^{-1}. \quad (2.33b)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{A}_m^\dagger die Pseudo-Inverse der Mittelpunktsmatrix \mathbf{A}_m . Wenn diese Kriterien (2.31),(2.32) und (2.33) für $m \times n$ -Intervallmatrizen mit $m \geq n$ (sinnvollerweise gemeinsam) angewandt werden, ist dadurch eine Untersuchung auf vollen Spaltenrang möglich, was in Kapitel 4 häufig benötigt wird.

Für Intervallmatrizen kann nach [FRL11] die Berechnung der Norm von Betragsnormen für reellwertige Matrizen abgeleitet werden:

$$\left\| [\mathbf{A}] \right\|_x = \left\| |\mathbf{A}_m| + \mathbf{A}_\Delta \right\|_x \quad \text{für } x \in \{1, \infty, F\}. \quad (2.34)$$

Dabei bezeichnet $|\mathbf{A}_m|$ elementweise den Betrag der Mittelpunktsmatrix \mathbf{A}_m . Die Angabe der Spektralnrm ist nicht mit dieser Definition möglich und stellt eventuell ein NP-schweres Problem dar [FRL11].

¹Mit $\lambda_i(\cdot)$ wird der i -te Eigenwert einer Matrix bezeichnet.

²Die gebräuchliche Spektralnrm $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ ist keine Betragsnorm.

Bei der Implementierung der intervallararithmetischen Operationen muss die beschränkte Rechengenauigkeit berücksichtigt werden, indem die beispielsweise in IEEE 754 [Ins08] standardisierten Verfahren der *gerichteten Rundung* (engl. *directed rounding*) eingesetzt werden. Dabei wird bei der Berechnung der unteren Intervallschranke immer abgerundet und bei der oberen Schranke aufgerundet. Die Implementierung muss dazu für die jeweiligen Berechnungen den Rundungsmodus des Prozessors entsprechend einstellen. Dies erfordert eine Anpassung der Implementierung für die jeweils eingesetzte Prozessorarchitektur. Durch diese dynamische Umschaltung des Rundungsmodus wird sichergestellt, dass das Rechenergebnis tatsächlich im Ergebnisintervall enthalten ist. Nur so kann das Rechenergebnis genutzt werden um garantierte Aussagen zu treffen.

Für Anwender der Intervallarithmetik stehen bereits einige Implementierungen für unterschiedliche Programmiersprachen zur Verfügung. Einige bekannte Implementierungen sind die C++ Bibliotheken *C-XSC* [HK04] und *PROFIL/BIAS* [Knü94], sowie die *Interval Arithmetic Library* der BOOST-Bibliotheksammlung [Boo15]. Auch in den Programmpaketen *Maple* und *Mathematica* stehen Intervalloperationen zur Verfügung. Die Verfahren in dieser Arbeit wurden im Programmpaket *MATLAB* implementiert, wobei die Toolbox *INTLAB* [Rum99] genutzt wurde. Einige Teile wurden aus Geschwindigkeitsgründen als MEX-Datei in C++ umgesetzt, wobei eine auf [JKDW01] basierende Intervallklasse aus [Wol10] genutzt wurde.

Unsicherheitsbeschreibung durch Ellipsoide

Eine andere Form zur Beschreibung von Unsicherheitsmengen nutzt Ellipsoide. Ein Ellipsoid kann dabei nach [Neu93] als n -dimensionale Kugel $\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq r\}$ definiert werden, die mittels der affinen Transformation $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{\xi}$ umgeformt wird. Somit ergibt sich die Definition

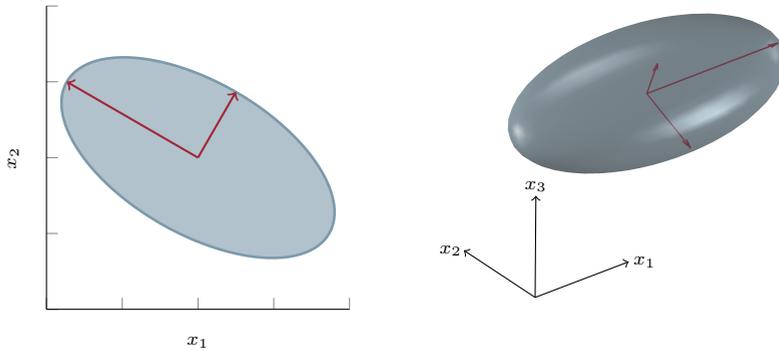
$$\mathcal{E}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{L}, r) = \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \leq r\} \quad (2.35)$$

der durch einen Ellipsoid beschriebenen Wertemenge mit $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ und einer unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $r \in \mathbb{R}_+$.

Eine weitere in der Literatur (z. B. [BSA⁺14a; PNDW04; RST02]) sehr gebräuchliche Definition eines Ellipsoids kann mit dem Mittelpunktvektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ und der Matrix $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ angegeben werden:

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{P}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})^T \boldsymbol{P}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \leq 1\}, \quad (2.36)$$

sofern die inverse Matrix \boldsymbol{P}^{-1} existiert. Das Ellipsoid beschreibt dann eine nichtleere



(a) Zweidimensionales Ellipsoid

(b) Dreidimensionales Ellipsoid

Abbildung 2.6: Beispiele für Ellipsoide

Menge [BSA⁺14a]. Die Matrix \mathbf{P} stellt eine symmetrische, positiv definite Matrix dar, welche die Form und die Größe des Ellipsoids definiert. Diese Matrix kann mit ihren Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren \mathbf{u}_i (Spalten der Matrix \mathbf{U}) auch als

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{U}^T \quad (2.37)$$

geschrieben werden [RST02], wobei die Eigenvektoren die Richtungen und $\sqrt{\lambda_i}$ die Längen der Halbachsen des Ellipsoids beschreiben. Die beiden Definitionen (2.35) und (2.36) können mittels der *Cholesky-Zerlegung* $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ ineinander umgerechnet werden. In Abbildung 2.6 sind zur Verdeutlichung ein zwei- und ein dreidimensionales Ellipsoid dargestellt, wobei die Halbachsen als rote Pfeile mit eingezeichnet sind.

Das Volumen eines Ellipsoids kann durch

$$\text{Vol}(\mathcal{E}(\mathbf{c}, \mathbf{P})) = V_n \cdot \sqrt{\det(\mathbf{P})} \quad (2.38)$$

in Abhängigkeit des Volumens einer n -dimensionalen Hyperkugel

$$V_n = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad (2.39)$$

berechnet werden, wobei $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion³ beschreibt. In [Neu93] wird ein

³ $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad \forall \Re\{z\} > 0$

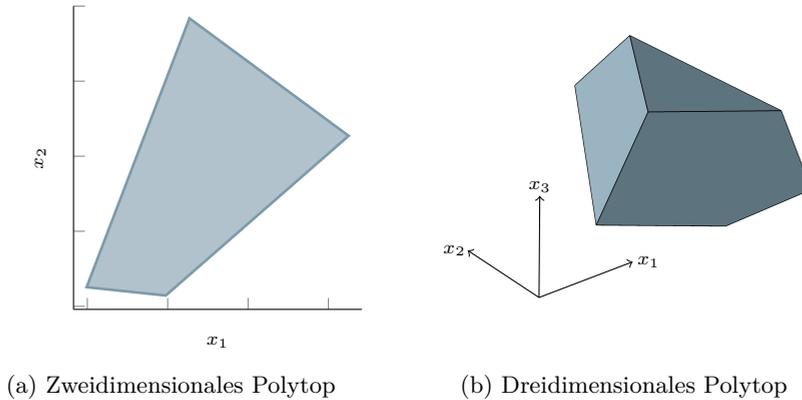


Abbildung 2.7: Beispiele für Polytope

Verfahren vorgestellt, um die affine Transformation

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \mathbf{b} \in [\mathbf{b}] \quad (2.40)$$

zu bestimmen und somit gemeinsame Berechnungen mit Intervallen und Ellipsoiden zu ermöglichen. Weitere wichtige Operationen mit Ellipsoiden wie Schnittmenge oder die *Minkowski-Summe* sind in [KV97; RST02] beschrieben, wobei die *Minkowski-Summe* zweier Mengen allgemein durch $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{a + b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ definiert ist. Bei Operationen mit Ellipsoiden ist häufig eine *äußere Approximation* erforderlich, da die resultierenden Mengen für viele Operationen kein Ellipsoid darstellen.

Der Einsatz von Ellipsoiden zur Beschreibung von Mengen kann durch Toolboxen, wie beispielsweise der *Ellipsoid Toolbox* [KV06a; KV06b] für MATLAB, deutlich vereinfacht werden. Die Verfahren aus [RST02] stehen für *Maple* ebenfalls als Toolbox zur Verfügung [STR15]. In Kapitel 5 werden Ellipsoide mit einem in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren zur Parameteridentifikation und zur Diagnose eingesetzt.

Weitere Beschreibungsformen beschränkter Unsicherheiten

Zusätzlich zu den bisher eingeführten Unsicherheitsbeschreibungen Intervall und Ellipsoid gibt es in der Literatur weitere Beschreibungsformen zum Einschluss von Wertemengen. Zwei wesentliche Kriterien zur Auswahl der Beschreibungsform sind zum einen die Größe der Überschätzung durch den Einschluss und zum anderen der dazu erforderliche Rechenaufwand.

Eine sehr allgemeine Beschreibungsform sind Polytope, wobei meist eine Einschränkung auf konvexe und beschränkte Polytope erfolgt (vgl. z. B. [Alt10]). Dabei kann ein konvexes Polytop als Schnittmenge von q Halbräumen definiert werden:

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{q \times 1} \}. \quad (2.41)$$

Diese Konstruktionsmöglichkeit wird als *H-Repräsentation* bezeichnet. Alternativ dazu ist es möglich, konvexe Polytope als konvexe Hülle von r *Eckpunkten* (engl. vertices) zu beschreiben, was als *V-Repräsentation* bezeichnet wird:

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha^i \mathbf{v}^i \mid \mathbf{v}^i \in \mathbb{R}^n, \alpha^i \in \mathbb{R}, \alpha^i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha^i = 1 \right\}. \quad (2.42)$$

Für MATLAB steht mit der *MPT3*-Toolbox [HKJM13] die Implementierung einer Polytop-Klasse zur Verfügung, die auch von anderen Toolboxen oder eigenen Verfahren genutzt werden kann. In Abbildung 2.7 sind ein Beispiel eines zwei- und eines dreidimensionalen konvexen Polytops dargestellt.

Polytope ermöglichen bei geeigneter Wahl der Eckpunkte eine genaue Beschreibung von Wertemengen. Problematisch bei ihrer Anwendung in allgemeiner Form ist jedoch, dass der Rechenaufwand exponentiell mit der Anzahl der Eckpunkte anwächst [LSA⁺13]. Bei vielen Operationen, wie beispielsweise der Bestimmung der Schnittmenge, kann sich die Komplexität somit deutlich erhöhen. Häufig werden daher Polytope eingesetzt, die zusätzliche Einschränkungen bezüglich ihrer Form aufweisen. Ein Beispiel hierfür sind die bereits beschriebenen Intervalle, deren Interpretation als achsenparallele Box ebenfalls ein Polytop darstellt.

Eine andere Vereinfachung von Polytopen stellen Zonotope dar, welche punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt sind. Sie lassen sich somit wie Polytope durch H- und V-Repräsentation beschreiben [Alt10], bieten jedoch zusätzlich (vgl. z. B. [BSA⁺14a; LSA⁺13]) eine *G-Repräsentation*

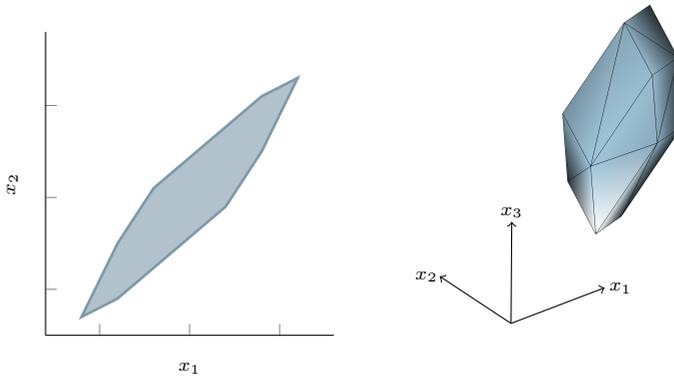
$$\mathcal{Z} = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}[\mathbf{b}] = \left\{ \mathbf{p} + \mathbf{H}\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in [\mathbf{b}] \right\} \quad (2.43)$$

mit dem Mittelpunktsvektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ und einer Generatormatrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Dabei beschreibt \oplus die *Minkowski-Summe*. Der Intervallvektor

$$[\mathbf{b}] = \left([-1, 1] \quad [-1, 1] \quad \dots \quad [-1, 1] \right)^T \in \mathbb{R}^r \quad (2.44)$$

stellt einen r -dimensionalen Einheitshyperwürfel⁴ dar, welcher durch die r Generatoren (Spalten der Matrix \mathbf{H}) in den n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n abgebildet wird.

⁴In Literatur häufig als r -dimensionale Box \mathbf{B}^r bezeichnet.



(a) Zweidimensionales Zonotop

(b) Dreidimensionales Zonotop

Abbildung 2.8: Beispiele für Zonotope

Durch r wird bei dieser Repräsentation die Ordnung des Zonotops in \mathbb{R}^n angegeben, weshalb das Zonotop gelegentlich als r -Zonotop bezeichnet wird.

In [Alt10] wird beschrieben wie ein Einschluss der Multiplikation einer Intervallmatrix $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_\Delta, \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_\Delta]$ mit einem Zonotop $\mathcal{Z} = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}[\mathbf{b}]$ bestimmt werden kann. Dazu wird die Hilfsmatrix \mathbf{F} mit den Elementen

$$f_{ij} = \begin{cases} \mathbf{A}_{\Delta_i} \left(|\mathbf{p}| + \sum_{q=1}^r |\mathbf{h}_q| \right), & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.45)$$

benötigt. Dabei entspricht \mathbf{A}_{Δ_i} der i -ten Zeile der Mittelpunktmatrix \mathbf{A} und \mathbf{h}_r den r Generatoren (Spalten der Generatormatrix \mathbf{H}). Mit dieser Hilfsmatrix kann der Einschluss der Multiplikation durch ein Zonotop mittels

$$[\mathbf{A}]\mathcal{Z} \subseteq (\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{p}) \oplus \widetilde{\mathbf{H}}[\mathbf{b}] \quad (2.46)$$

mit der erweiterten Generatormatrix

$$\widetilde{\mathbf{H}} = (\mathbf{A}_m \mathbf{H} \quad \mathbf{F}) \quad (2.47)$$

bestimmt werden.

Abbildung 2.8 zeigt als Beispiel ein zwei- und ein dreidimensionales Zonotop jeweils vierter Ordnung. Für eine Beschreibung weiterer grundlegender Rechenoperationen mit Zonotopen wird auf beispielsweise [LSA⁺13] verwiesen. Auch bei Zonotopen kann

sich durch mathematische Operationen die Komplexität erhöhen, weshalb Verfahren zur Ordnungsreduktion entwickelt wurden (z. B. in [LSA⁺13]). Für MATLAB enthält die *PnMPC*-Toolbox [RBF13] die Implementierung einer Zonotop-Klasse und einiger elementarer Operationen, welche auf der *MPT3*-Toolbox [HKJM13] für Polytope aufbaut. In Kapitel 5 werden Zonotope zur Parameteridentifikation und auch zur Diagnose genutzt.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Möglichkeiten zur Beschreibung von Wertemengen stellen jeweils unterschiedliche geometrische Formen dar. Eine Bewertung und ein Vergleich der unterschiedlichen mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibungsformen kann nur im Hinblick auf die geplante Nutzung der Beschreibung erfolgen. Die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale sind dabei die Größe der Überschätzung des Einschlusses der Wertemengen, sowie der Rechenaufwand im Umgang mit den Wertemengen. Da die Beschreibungsformen in der Literatur unterschiedlich stark verbreitet sind, muss für eine Bewertung auch die Verfügbarkeit von Verfahren für die Beschreibungsformen im Gebiet der geplanten Nutzung berücksichtigt werden. In dieser Arbeit wird die Parameteridentifikation in Kapitel 3 anhand der Unsicherheitsbeschreibung durch Intervalle, Ellipsoide und Zonotope betrachtet.

2.2.3 Vergleich beider Beschreibungsformen für Unsicherheiten

In den vorherigen Abschnitten wurden durch die stochastische und die mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibung zwei grundsätzlich unterschiedliche Beschreibungsformen für Unsicherheiten vorgestellt. Diese Beschreibungsformen beruhen auf verschiedenen Voraussetzungen und Zielsetzungen und stellen für unterschiedliche Szenarien und Anwendungen jeweils die bessere bzw. passendere Wahl dar. In diesem Abschnitt werden einige wesentlichen Eigenschaften beider Ansätze zum Vergleich gegenübergestellt.

Bei der weit verbreiteten stochastischen Beschreibungsform wird die Unsicherheit durch eine PDF charakterisiert, welche bekannt sein muss oder aus den verfügbaren Daten abgeleitet werden muss. Hierfür werden häufig Annahmen getroffen. Bei der mengenbasierten Beschreibungsform dagegen werden keine Informationen zur Verteilung der Unsicherheit benötigt. Stattdessen muss die Unsicherheit auf einen begrenzten Wertebereich beschränkt sein und somit absolute Schranken aufweisen. Sofern diese Schranken nicht bekannt sind werden hierfür Annahmen benötigt.

Als Ergebnis liefert die stochastische Beschreibungsform nicht nur einen einzelnen Wert sondern auch eine zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung des Ergebnisses. Falls die Annahme einer bestimmten PDF nicht zutrifft führt dies zu Abweichungen

des Ergebnisswertes und zu verfälschten Konfidenzannahmen. Im Gegensatz dazu kann bei der mengenbasierten Beschreibungsform kein einzelner wahrscheinlichster Wert angegeben werden, sondern stattdessen die Menge aller möglichen Werte. Durch Nutzung der entsprechenden arithmetischen Operationen kann die Zugehörigkeit zur Lösungsmenge garantiert werden. Sollte der bei den Berechnungen genutzte Wertebereich im Vergleich zur tatsächlichen Unsicherheit zu klein gewählt sein, kann diese Aussage nicht getroffen werden, da nicht alle möglichen Werte berücksichtigt wurden. Die Wahl der Beschränkungen der Unsicherheit muss entsprechend sorgfältig durchgeführt werden. Bei der mengenbasierten Beschreibungsform besteht die Schwierigkeit, dass durch viele Operationen lediglich ein Einschluss der tatsächlichen Wertemenge bestimmt werden kann und somit eine Überapproximation entsteht.

Durch die weite Verbreitung der stochastischen Beschreibungsform stehen sehr viele ausgereifte Verfahren für unterschiedliche Problemstellungen zur Verfügung, welche dieser Beschreibungsform viele Einsatzgebiete erschließt. Auch für die seltener genutzte mengenbasierte Beschreibungsform wurden in den letzten Jahren und Jahrzehnten viele Verfahren erarbeitet, sodass inzwischen auch hierfür Anwendungsmöglichkeiten wie beispielsweise zur Fehlerdetektion ohne Fehlalarme bestehen. Beide Beschreibungsformen stellen somit keinen Gegensatz dar, sondern bieten vielmehr je nach Zielsetzung und notwendiger Annahmen eine alternative Auswahlmöglichkeit.

2.3 Identifikation dynamischer Systeme

Nachdem in den vorherigen Abschnitten 2.1 und 2.2 mögliche Systembeschreibungsformen sowie die auftretende Unsicherheit betrachtet wurden, widmet sich dieser Abschnitt der Bestimmung von Modellen mithilfe gemessener Daten. Diese Vorgehensweise wird Identifikation genannt, wobei nach [Lju99; Nel01] drei Fälle unterschieden werden können. Bei der *Grey-Box-Modellierung* wird ein gewisses Vorwissen über das System vorausgesetzt, welches als Modellgleichungen vorliegt. Damit sind die Struktur und die Ordnung des Modells festgelegt. Die Parameter des Modells sind allerdings unbekannt und sollen aus den Messdaten bestimmt werden. Daher wird diese Vorgehensweise häufig, wie auch in dieser Arbeit, als *Parameteridentifikation* bezeichnet. Die dadurch gewonnenen Modelle ermöglichen einen Einblick in die inneren Abläufe des Systems, sofern diese durch die bekannten Modellgleichungen beschrieben werden.

Im Gegensatz dazu ist bei der *Black-Box-Modellierung* keine Kenntnis der internen Abläufe erforderlich. Lediglich die Beschränkung auf eine Klasse von Modellen ist für die Auswahl des eingesetzten Verfahrens erforderlich. Bei den Verfahren wird sowohl die Ordnung des Modells als auch dessen Parameter direkt aus den Messdaten

bestimmt, was im Folgenden als *Black-Box-Identifikation* bezeichnet wird. Die *White-Box-Modellierung*, also die rein mathematische Beschreibung ohne experimentelle Anteile, wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Für die Bewertung des Identifikationsergebnisses und teilweise auch bereits zur Identifikation werden Gütekriterien benötigt, welche die Übereinstimmung zwischen dem gemessenen Systemverhalten und dem identifizierten Modell bewerten. Das Ergebnis der Identifikation muss vor seiner Anwendung anhand der betrachteten Gütekriterien auch mit separaten Validierungsdaten, welche nicht zur Identifikation eingesetzt wurden, überprüft werden [Lju99]. Sofern das identifizierte Modell nicht die für die Anwendung benötigte Genauigkeit erreicht, muss die Identifikation mit geänderten Einstellungen oder einem anderen Identifikationsverfahren wiederholt werden.

Der folgende Abschnitt stellt die allgemeinen Voraussetzungen zur Identifikation und die Eigenschaften der identifizierten Modelle vor. Anschließend werden einige grundlegende Identifikationsverfahren für Systeme mit stochastischer Unsicherheitsbeschreibung kurz vorgestellt, um einen Überblick über die Standardverfahren aus der Literatur zu liefern. Systeme mit beschränkter Unsicherheit werden an dieser Stelle nicht betrachtet. Das Kapitel 3 stellt Parameteridentifikationsverfahren für Daten mit beschränkter Unsicherheit vor. Den Hauptteil dieser Arbeit bilden die Kapitel 4 bis 5, welche eine Vorgehensweise zu mengenbasierten Black-Box-Identifikation vorstellen, für die in der Literatur noch keine Verfahren existieren.

2.3.1 Allgemeine Voraussetzungen zur Identifikation

Für alle Identifikationsverfahren, egal ob System- oder Parameteridentifikation, sind Messdaten eines Systems erforderlich. Dazu müssen die Ausgangssignale $\mathbf{y}(k)$ und ggf. die Eingangssignale $\mathbf{u}(k)$ zu diskreten Abtastpunkten gemessen werden. Die Datenpunkte sollten dabei für alle Signale synchronisiert zu äquidistanten Zeitpunkten $t = k \cdot T_a$ mit der Abtastzeit T_a erfolgen. Dabei ist darauf zu achten, dass eine ausreichende Datensatzlänge vorliegt. Das theoretische Minimum an linear unabhängigen Datenpunkten stellt die Anzahl der unbekannt Parameter dar [Buc10], was für praktische Anwendungen jedoch deutlich überschritten werden sollte, um den Einfluss von unbekannt Störungen zu minimieren.

Weiterhin ist bei der Aufnahme der Messdaten darauf zu achten, dass von den gewählten Eingangssignalen alle relevanten Systemanteile angeregt werden. Das resultierende Modell ist nur für den Dynamik- und Wertebereich anwendbar, der von den zur Identifikation eingesetzten Daten ausreichend abgedeckt wird. Für darüber hinausgehende Bereiche hängt die Qualität der Extrapolation stark von der

Systemstruktur ab und kann nicht generell angegeben werden sofern es sich um kein lineares System handelt. Die Versuchsplanung muss daher so ausgeführt werden, dass der Informationsgehalt der eingesetzten Signale möglichst groß ist [Lju99]. Häufig verwendete Eingangssignale sind beispielsweise (gefiltertes) weißes gaußsches Rauschen (WGR) oder zufällige Binärsignale (engl. random binary signal). Weitere Details zur Versuchsplanung und zu den eingesetzten Signalen sind ausführlich in [Lju99] beschrieben.

2.3.2 Überblick über Identifikationsverfahren mit stochastischer Unsicherheitsbeschreibung

Für Systeme, deren Unsicherheit durch stochastische Größen beschrieben werden kann, gibt es eine Vielzahl von ausgereiften Identifikationsverfahren. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über einige gebräuchliche Verfahren gegeben. Dadurch werden einige grundlegende Problemstellungen und Ansätze vorgestellt, welche auch Einfluss auf die im nächsten Kapitel behandelten mengenbasierten Verfahren haben. Für eine umfassende Einführung wird auf Standardwerke der Literatur verwiesen, beispielsweise auf [IM11; Lju99] oder für nichtlineare Systeme [Nel01].

Parameteridentifikation

Das bekannteste Verfahren zur Identifikation von Modellparametern ist die *Methode der kleinsten Quadrate* (LS, Least Squares), welche bereits Anfang des 19. Jahrhunderts von Carl Friedrich Gauß eingesetzt wurde. Basis des Verfahrens stellt eine Systembeschreibung in der Form

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\Theta + \nu \quad (2.48)$$

dar mit der Ausgangsmatrix $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times n_y}$, dem Regressor $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times n}$, den Parametern $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ und der Störung $\nu \in \mathbb{R}^{N \times n_y}$. Diese Form kann sowohl für statische als auch für einige dynamische Systeme, wie beispielsweise ARX-Modelle nach Abschnitt 2.1, angegeben werden, wenn dies beim Aufbau des Regressors \mathbf{M} berücksichtigt wird. Dieses Gleichungssystem ist im Fall einer quadratischen Matrix \mathbf{M} eindeutig lösbar, nicht jedoch im bei der Identifikation üblichen überbestimmten Fall. Das Ziel des LS-Verfahrens ist daher die Minimierung der quadratischen Gütefunktion

$$\min_{\Theta} J_{\text{LS}} = \min_{\Theta} \left(\|\mathbf{Y} - \mathbf{M}\Theta\|_{\text{F}}^2 \right), \quad (2.49)$$

wobei $\|\cdot\|_F$ die *Frobenis-Norm* $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{i,j}^2}$ bezeichnet. Bei genügender Anregung kann die Lösung dieses Minimierungsproblems mittels

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{Y} \quad (2.50)$$

berechnet werden. Wenn bei der Aufnahme der Messdaten lediglich mittelwertfreie, unkorrelierte Rauschprozesse mit konstanter Varianz als Störung auftreten, liefert der LS-Schätzer eine erwartungstreue Schätzung $\hat{\Theta}$ mit minimaler Varianz für die Parameter [Buc10; IM11; Nel01]. Vom LS-Schätzer gibt es verschiedene Varianten, die eingesetzt werden können, wenn die Störung andere stochastische Charakteristika aufweist. Für statische Systeme mit Rauschen mit bekannter veränderlicher Varianz kann der *gewichtete LS-Schätzer* (WLS, weighted least squares) eingesetzt werden, bei korreliertem Rauschen mit bekannter Kovarianzmatrix der *verallgemeinerte LS-Schätzer* (GLS, generalized least squares).

Eine weitere Verallgemeinerung für statische Systeme stellt die *Methode der totalen kleinsten Quadrate* (TLS, total least squares) dar, bei der zusätzlich zur Unsicherheit im Ausgang \mathbf{y} auch der Regressor \mathbf{M} von Störungen überlagert wird. Anstatt der Modellgleichung (2.48) wird somit

$$\mathbf{Y} + \boldsymbol{\nu} = (\mathbf{M} + \boldsymbol{\xi})\Theta \quad (2.51)$$

betrachtet [IM11; MH07], wobei die Matrizen die Dimensionen $\mathbf{M}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ und $\mathbf{Y}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{N \times n_y}$ haben. Dieser Ansatz wird in der Literatur als *Fehler in den Variablen* (EIV, Errors-In-Variables) bezeichnet. Zur Berechnung wird die Singulärwertzerlegung (SVD, Singular Value Decomposition)

$$\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \text{SVD}(\mathbf{M}_{\text{erw.}}) \quad (2.52)$$

der erweiterten Datenmatrix

$$\mathbf{M}_{\text{erw.}} = (\mathbf{M} \quad \mathbf{Y}) \quad (2.53)$$

benötigt. Der Schätzwert der Parameter berechnet sich durch

$$\hat{\Theta} = -\mathbf{V}_{22}^{-1} \mathbf{V}_{12}, \quad (2.54)$$

wobei die Matrizen $\mathbf{V}_{12} \in \mathbb{R}^{n-n_y \times n_y}$ und $\mathbf{V}_{22} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ durch Aufteilen der Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

aus der SVD bestimmt werden können. Eine ausführlichere Beschreibung der Eigenschaften des Verfahrens sowie einiger Varianten davon findet sich in [MH07].

Wird der LS-Schätzer für dynamische Systeme eingesetzt, besteht der Regressor \mathbf{M} aus Spalten der Eingangs- und Ausgangssignale, was zu einer Korrelation des Rauschens zwischen \mathbf{M} und \mathbf{Y} führt. Dadurch sind die Voraussetzungen der Schätzung verletzt, was zu einem nicht erwartungstreuen Schätzergebnis führt.

Um diese Problemstellung zu umgehen, wurden mehrstufige Verfahren entwickelt wie beispielsweise die im Folgenden besprochene *Methode der Hilfsvariablen* (IV, Instrumental Variables) [Buc10; IM11; Lju99]. Dabei wird der Ausgangsfehler des Modells mit einer Hilfsvariablenmatrix multipliziert:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{E} = \mathbf{W}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{M}\boldsymbol{\Theta}). \quad (2.56)$$

Die Matrix \mathbf{W} muss dabei so gewählt werden, dass $\mathbf{W}^T \mathbf{M}$ invertierbar ist und keine Korrelation mit dem Rauschen vorliegt, wodurch für den Erwartungswert $\mathcal{E} \left\{ \mathbf{W}^T \mathbf{E} \right\} = \mathbf{0}$ gilt. Weiterhin sollte für eine schnelle Konvergenz eine maximale Korrelation zwischen den Hilfsvariablen und dem ungestörten Regressor bestehen. Die Schätzung der Parameter kann damit direkt durch Umstellen der Gleichung (2.56) zu

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \left(\mathbf{W}^T \mathbf{M} \right)^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} \quad (2.57)$$

gewonnen werden. Für die Wahl der Hilfsvariablen wird häufig zunächst eine Parameteridentifikation des Modells mit dem klassischen LS-Schätzer durchgeführt und mit diesem dann der Verlauf der Ausgangsgrößen simuliert. Diese simulierten Daten weisen trotz der nicht erfüllten Voraussetzungen der Schätzung eine hohe Korrelation mit den gemessenen Ausgangsgrößen und eine sehr geringe Korrelation mit dem Rauschen auf. Somit kann die Matrix der Hilfsvariablen aus den Eingangsdaten und den simulierten Ausgangsdaten aufgebaut werden. Diese Vorgehensweise kann mit den so identifizierten Parametern iterativ wiederholt werden, um das Schätzergebnis zu verbessern.

Die bisher beschriebenen Parameteridentifikationsverfahren verarbeiten den kompletten Datensatz nach der Messung. Nachteil dieser *Blockverarbeitung* ist ihr hoher Speicherbedarf sowie die Tatsache dass Parameter erst nach Ende der Messung bestimmt werden können. Um diese Nachteile zu vermeiden, kann der rekursive LS-Schätzer⁵ (RLS, Recursive Least Squares) eingesetzt werden, welcher im Folgenden exemplarisch für statische MISO-Systeme

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{u}(k)^T \boldsymbol{\theta} + \nu(k) \quad (2.58)$$

⁵Wird in dieser Arbeit, wie in der Literatur üblich, als rekursives Verfahren bezeichnet, obwohl es sich um ein iteratives Verfahren handelt.

vorgestellt wird. Eine ausführlichere Beschreibung mit Herleitung basierend auf dem klassischen LS-Schätzer ist beispielsweise in [IM11] zu finden. Die Schätzung der Parameter erfolgt mittels der Gleichungen

$$\boldsymbol{\gamma}(k) = \mathbf{P}(k-1)\mathbf{u}(k)^\top (1 + \mathbf{u}(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{u}(k)^\top)^{-1}, \quad (2.59a)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \boldsymbol{\gamma}(k)\mathbf{u}(k)\mathbf{P}(k-1), \quad (2.59b)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{P}(k)\mathbf{u}(k)^\top (y(k) - \mathbf{u}(k)\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)), \quad (2.59c)$$

wobei $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ einen Korrekturvektor und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix darstellt. Zur Initialisierung wird häufig $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{I}$ mit großem α verwendet, sofern keine Information über die Parameter vorliegt. Mit Hilfe einer Erweiterung des RLS ist es möglich, langsam zeitvariante Parameter zu bestimmen, indem ein Vergessensfaktor eingeführt wird und somit weiter zurückliegende Messwerte geringer gewichtet werden. Der RLS-Schätzer ist eng verwandt mit dem *Kalman-Filter* [Kál60], sofern die Parameter als Zustände des Kalman-Filters interpretiert werden [Nel01].

Black-Box-Identifikation

Bei den im letzten Abschnitt vorgestellten Parameteridentifikationsverfahren wird stets eine bekannte Modellstruktur sowie eine bekannte Modellordnung vorausgesetzt, damit die Anzahl der zu bestimmenden Parameter bekannt ist. Liegt diese Information nicht vor, werden Verfahren zur Black-Box-Identifikation benötigt. Die einfachste Vorgehensweise dazu stellt die Parameteridentifikation für eine vorab getroffene Auswahl an Modellstrukturen und Modellordnungen dar. Die identifizierten Modelle werden anschließend mittels eines Gütekriteriums bewertet und das Modell mit der größten Übereinstimmung als Ergebnis ausgewählt.

In [Lju99] wird eine systematischere Vorgehensweise beschrieben, welche ursprünglich in [Woo71] vorgestellt wurde. Dabei wird der Regressor $\boldsymbol{\varphi}$ nach Gleichung (2.8) eines ARX-Modells genutzt, um eine Hilfsmatrix

$$\mathbf{R}^{\hat{n}}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_{\hat{n}}(k)\boldsymbol{\varphi}_{\hat{n}}^\top(k) \quad (2.60)$$

aufzustellen. Diese Matrix wird ohne Rauschen (bei genügender Anregung) singulär für $\hat{n} > n$ mit $\hat{n} = \hat{n}_a = \hat{n}_b$. Im Fall mit Rauschen wird eine erweiterte Matrix

$$\hat{\mathbf{R}}^{\hat{n}}(N) = \mathbf{R}^{\hat{n}}(N) - \hat{\sigma}^2 \mathbf{R}_\nu \quad (2.61)$$

untersucht, wobei zur Auswertung Schwellwerte eingesetzt werden. Der Einfluss $\hat{\sigma}^2 \mathbf{R}_\nu$

des Rauschens ν auf $\hat{\mathbf{R}}^{\hat{n}}(N)$ muss dabei separat geschätzt werden, beispielsweise indem mit $\mathbf{R}_\nu = \mathbf{I}$ die Varianz des Rauschens direkt eingesetzt wird.

Eine weitere Möglichkeit stellt die Nutzung von Korrelationsfunktionen dar [Lju99]. Dabei wird untersucht, ob ein Signal weitere Information zu einem Modell geringerer Ordnung beitragen kann. Die Vorgehensweise erhöht dabei schrittweise die Ordnung eines IO-Modells, indem weitere zeitliche Verschiebungen der Ausgangsgröße hinzugefügt werden. Dazu wird in jedem Schritt die Korrelation zwischen der verschobenen Ausgangsgröße y_{i-k} und dem Modellfehler $\epsilon = y - \hat{y}(\hat{\Theta})$ bestimmt. In jedem Schritt des Verfahrens ist somit eine Parameteridentifikation für die aktuell betrachtete Ordnung erforderlich.

Einen anderen Ansatz verfolgen Verfahren, die zur Klasse der *subspace-based state-space system identification* (4SID, Subspace-Identification) gehören. Dabei handelt es sich um eine Gruppe von Verfahren, die in den letzten Jahrzehnten entwickelt wurden, um die Ordnung und die Parameter von Zustandsraummodellen nach Gleichung (2.12) nicht-iterativ aus Messdaten zu bestimmen. Eine ausführliche Vorstellung der unterschiedlichen Verfahren ist beispielsweise in [Buc10] enthalten.

2.4 Zusammenfassung und Überblick

In diesem Kapitel wurden die notwendigen Grundlagen für die weitere Arbeit angegeben. Dazu wurden zunächst verschiedene Modellformen für lineare, zeitinvariante Systeme vorgestellt. Der Schwerpunkt lag dabei auf den in dieser Arbeit genutzten ARX- und Zustandsraummodellen, sowie der Umformung zwischen diesen beiden Modellformen. Anschließend wurden verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von Unsicherheiten näher betrachtet. Dazu wurden insbesondere mengenbasierte Beschreibungsformen vorgestellt, welche in dieser Arbeit eingesetzt werden. Im Gegensatz zu stochastischen Beschreibungsformen, sind die mengenbasierten Beschreibungsformen auf eine beschränkte Unsicherheit ausgerichtet. In einer kurzen Gegenüberstellung wurden die wesentlichen Eigenschaften und Merkmale der beiden Ansätze verglichen. Der letzte Teil des Kapitels widmete sich der Identifikation dynamischer Systeme, wobei hier nur Verfahren für eine stochastische Unsicherheitsbeschreibung kurz beschrieben wurden. Dadurch wurden grundlegende Problemstellungen und Ansätze vorgestellt, um einen Überblick über Standardverfahren der Literatur zu geben. Diese Problemstellungen werden durch Verfahren für mengenbasierte Beschreibungsformen ebenfalls betrachtet, welche in den folgenden Kapiteln ausführlich behandelt werden.

Kapitel 3

Stand der Technik zur mengenbasierten Identifikation und Fehlerdetektion

Dieses Kapitel stellt den aktuellen Stand der Technik und der Forschung im Umgang mit beschränkter Unsicherheit in den Bereichen Systemidentifikation und Fehlerdetektion vor. Der größte Teil des Kapitels beschäftigt sich dabei mit der Identifikation von dynamischen Systemen aus Messdaten mit beschränkter Unsicherheit. Bei den so gewonnenen Modellen handelt es sich um Modellmengen, da die jeweiligen Parameter des Modells durch Parametermengen beschrieben werden. Modelle mit solchen Parametermengen können zur Fehlerdetektion eingesetzt werden, was im Anschluss an die Identifikation vorgestellt wird.

Die in der Literatur bekannten Verfahren zur mengenbasierten Fehlerdetektion, wie z. B. [Pla07; Wol10], setzen ein geeignetes Modell voraus, meist jedoch ohne Angaben zur Bestimmung solcher Modelle zu machen. Eine grundlegende Möglichkeit, passende Modelle zu erzeugen, besteht darin, das System mittels klassischer Modellbildung zu beschreiben und anschließend heuristisch zu mengenbasierten Modellen zu erweitern. Da diese Herangehensweise jedoch störanfällig und nicht methodisch begründet ist, wird im Folgenden die datenbasierte Modellbildung für diese Anwendung detailliert betrachtet.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Black-Box-Identifikation und beleuchtet die in der Literatur zu diesem Thema vorgestellten Verfahren. Im Anschluss werden verschiedene Ansätze zur Parameteridentifikation vorgestellt. Dabei kommen unterschiedliche Unsicherheitsbeschreibungsformen zum Einsatz. Im dritten Abschnitt wird die Anwendung von Zustandsraummodellen mit unsicheren Parametern zur Fehlerdetektion vorgestellt.

Dabei können an zwei unterschiedlichen Stellen bei den betrachteten dynamischen Systemen beschränkte Unsicherheiten auftreten. Zum einen können gemessene Daten durch beschränkte Unsicherheiten bzw. Messfehler überlagert sein. Diese Unsicherheiten werden in dieser Arbeit durch Intervalle beschrieben, da jeder Datenpunkt separat und unabhängig von anderen betrachtet wird. Diese Herangehensweise setzt für jeden Datenpunkt eine individuelle obere und untere Fehlerschranke voraus. Zum anderen können die Modellparameter eine beschränkte Unsicherheit aufweisen. Die Beschreibungsform dieser Unsicherheit wird in dieser Arbeit durch die eingesetzten Identifikationsverfahren festgelegt. Die Auswahl der Verfahren sollte daher auf den geplanten Einsatzzweck des Modells abgestimmt sein. Bei der mengenbasierten Identifikation von Modellen wirkt sich die Unsicherheit der Daten direkt auf die Unsicherheit der identifizierten Modellparameter aus.

In dieser Arbeit wird für die Aufnahme von Intervall-Messdaten davon ausgegangen, dass es ein reales System gibt, welches von den Eingangssignalen \mathbf{u}_{wahr} angeregt wird. Als Reaktion erzeugt dieses ungestörte System die Ausgangssignale \mathbf{y}_{wahr} . Für die Identifikation sind jedoch weder die ungestörten Eingangs- noch Ausgangssignale bekannt. Die gemessenen reellwertigen Ausgangssignale $\mathbf{y}_{\text{mess}}(k)$ sind durch Störungen $\boldsymbol{\xi}(k)$ mit der unteren und oberen Schranke $\underline{\boldsymbol{\xi}}(k)$ bzw. $\bar{\boldsymbol{\xi}}(k)$ überlagert. Dadurch ist sichergestellt, dass der wahre (ungestörte) Wert

$$\mathbf{y}_{\text{wahr}}(k) \in [\mathbf{y}] = [\mathbf{y}_{\text{mess}}(k) + \underline{\boldsymbol{\xi}}(k), \mathbf{y}_{\text{mess}}(k) + \bar{\boldsymbol{\xi}}(k)], \quad (3.1)$$

im Intervall der Messdaten $[\mathbf{y}]$ enthalten ist. Im Fall einer Störung mit symmetrischen Schranken vereinfacht sich dies zu

$$\mathbf{y}_{\text{wahr}}(k) \in [\mathbf{y}] = [\mathbf{y}_{\text{mess}}(k) - \boldsymbol{\xi}_{\Delta}(k), \mathbf{y}_{\text{mess}}(k) + \boldsymbol{\xi}_{\Delta}(k)]. \quad (3.2)$$

Mit den Eingangssignalen verhält es sich entsprechend, allerdings sind zusätzlich zu Messfehlern auch Fehler der Aktoren möglich, die aus dem angeforderten Eingangssignal \mathbf{u}_{soll} das tatsächlich wirksame Signal \mathbf{u}_{wahr} erzeugen. Dabei kann entweder das angeforderten Eingangssignal \mathbf{u}_{soll} direkt betrachtet werden, oder das tatsächlich wirksame Eingangssignal \mathbf{u}_{mess} wird gemessen. Auch hier gilt, dass der wahre (ungestörte) Wert im Intervall der Daten enthalten ist, also

$$\mathbf{u}_{\text{wahr}}(k) \in [\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_{\text{mess/soll}}(k) - \boldsymbol{\nu}_{\Delta}(k), \mathbf{u}_{\text{mess/soll}}(k) + \boldsymbol{\nu}_{\Delta}(k)]. \quad (3.3)$$

In Abbildung 3.1 werden die Zusammenhänge am Beispiel eines Ausgangssignals verdeutlicht. Dabei stellt die gefüllte Fläche den Verlauf der gemessenen Werte mit ihrer Unsicherheit dar, während die rote Linie den ungestörten Ausgang darstellt.

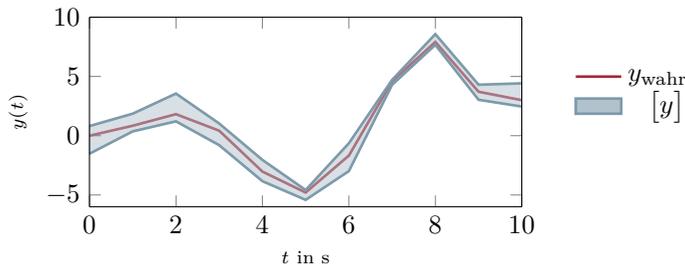


Abbildung 3.1: Beispiel zur Einbettung eines ungestörten Signalverlaufs in Intervallmessdaten

3.1 Black-Box-Identifikation

Zum Thema Black-Box-Identifikation für Messdaten mit beschränkter Unsicherheit gibt es sehr wenige Veröffentlichungen in der Literatur. Einige Quellen bezeichnen ihre Verfahren als Verfahren zur Systemidentifikation, setzen aber bei näherer Betrachtung die Dimension des Parametervektors als bekannt voraus. Damit handelt es sich mit der hier genutzten Einteilung der Identifikationsverfahren (vgl. Abschnitt 2.3) um Verfahren zur Parameteridentifikation. Beispiele hierfür sind die Arbeiten [KCM11] und [CGV11]. Auch die Beiträge im Sammelband [MNPW96], welche sich mit parametrischen Modellen beschäftigen, setzen eine bekannte Anzahl an Parametern und somit eine bekannte Modellordnung voraus.

In [KLB94] wird ein Verfahren zur Systemidentifikation von SISO-Modellen vorgestellt, welche als Übertragungsfunktion im Frequenzbereich dargestellt sind. Dabei wird zu Beginn des Verfahrens auf die Betrachtung der beschränkten Unsicherheit verzichtet. Stattdessen werden die Systemordnung und die Parameter mit klassischen Verfahren berechnet, welche für stochastische Unsicherheitsbeschreibungen entwickelt wurden. Im zweiten Schritt des Verfahrens werden die zuvor bestimmten Parameter dann zu Intervallen erweitert, welche konsistent zu den gemessenen Daten mit beschränkter Unsicherheit sind. Somit handelt es sich bei diesem Verfahren streng genommen nicht um Black-Box-Identifikation basierend auf beschränkten Messdaten, da ein durch klassische Black-Box-Identifikation gewonnenes Modell erweitert wird. Die speziellen Eigenschaften der beschränkten Unsicherheit werden erst bei der Bestimmung der Parameter berücksichtigt.

In Voruntersuchungen zu dieser Arbeit wurden, auch im Rahmen einer betreuten Abschlussarbeit, Möglichkeiten zur Anwendung der klassischen Black-Box-Identifikation auf Messdaten mit beschränkter Unsicherheit anhand der Subspace-Identification

untersucht. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten, wie beispielsweise die Notwendigkeit einer mengenbasierten SVD, verdeutlichen die Notwendigkeit von speziell an die Eigenschaften der beschränkten Unsicherheit angepassten Verfahren.

Somit kann abschließend festgestellt werden, dass es in der Literatur keine Verfahren zur Black-Box-Identifikation gibt, welche direkt die Systemordnung aus Messdaten mit beschränkter Unsicherheit bestimmen. Das im Kapitel 4 beschriebene Verfahren stellt zusammen mit den zugehörigen Vorveröffentlichungen in den Fachbeiträgen [ZBD13; ZBD14a; ZBD14b; ZBD14c] somit das erste Verfahren zur Ordnungsbestimmung direkt aus Messdaten mit beschränkter Unsicherheit dar. Basierend auf den im nächsten Abschnitt beschriebenen Parameteridentifikationsverfahren wird in Kapitel 5 mit dieser Ordnungsbestimmung eine komplette Möglichkeit zur Black-Box-Identifikation vorgestellt.

3.2 Parameteridentifikation

Im Gegensatz zur Black-Box-Identifikation gibt es zur Parameteridentifikation viele verschiedene Quellen in der Literatur. Die Verfahren basieren auf unterschiedlichen Voraussetzungen und nutzen unterschiedliche Beschreibungsformen für die Unsicherheit der resultierenden Parametermengen. Im Folgenden wird eine repräsentative Auswahl verschiedener Verfahren vorgestellt.

3.2.1 Lineare Intervall-Gleichungssysteme

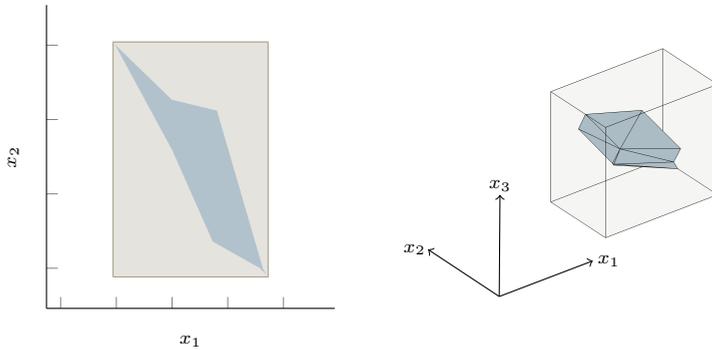
Eine gebräuchliche Form zur Beschreibung eines Parameteridentifikationsproblems ist die Aufstellung eines linearen Gleichungssystems. Im Falle von Intervallmessdaten hat das Intervall-Gleichungssystem (IGS) die Form⁶

$$[\mathbf{M}]\boldsymbol{\vartheta} = [\mathbf{y}]. \quad (3.4)$$

Dabei sind der Regressor $[\mathbf{M}] \in \mathbb{IR}^{m \times \ell}$ und der Ausgangsvektor $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^m$ Intervalle der gemessenen Daten. Die Lösung des Gleichungssystems stellt die Parametermenge

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{\vartheta}} = \left\{ \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^{\ell} \mid \exists \mathbf{M} \in [\mathbf{M}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}] \quad (\mathbf{M}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{y}) \right\} \quad (3.5)$$

⁶Die in der Literatur übliche Notation linearer Intervall-Gleichungssysteme $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]$ wird hier direkt für die Anwendung zur Parameteridentifikation angepasst.



(a) Zweidimensionales Beispiel

(b) Dreidimensionales Beispiel

Abbildung 3.2: Veranschaulichung der nichtkonvexen Lösungsmenge eines IGS mit exaktem Intervall-Einschluss, erstellt mit *plotlinsol* aus INTLAB

dar, welche im Allgemeinen eine komplizierte, nicht-konvexe Form im Parameter-raum annimmt. Ein Beispiel für eine derartige Lösungsmenge mit ihrem exaktem Intervall-Einschluss ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Die exakte Bestimmung dieser Lösungsmenge ist ein NP-schweres Problem (vgl. z. B. [May09; MKC09]). Selbst die Bestimmung eines exakten komponentenweisen Einschlusses in Intervalle, also die Einbettung in einen Hyperquader, stellt ein NP-schweres Problem dar (vgl. [KLN93; RK95]). Stattdessen werden Verfahren eingesetzt, welche einen möglichst engen Einschluss $[\vartheta] \supseteq \mathcal{D}_\vartheta$ der Lösung bestimmen. Der MIMO-Fall, also wenn $[\mathbf{Y}] \in \mathbb{IR}^{m \times n_y}$ und $[\vartheta]$ durch die Matrix $[\Theta] \in \mathbb{IR}^{\ell \times n_y}$ ersetzt wird, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in n_y einzelne MISO-Fälle zur Parameteridentifikation mit dem jeweiligen Ausgangssignal aufgeteilt werden.

Für die Berechnung der Lösung muss unterschieden werden, ob es sich um ein quadratisches IGS mit $m = \ell$ handelt oder um ein überbestimmtes IGS mit $m > \ell$. Wie im reellwertigen Fall besitzt ein quadratisches IGS eine eindeutige, beschränkte Lösung, sofern der Regressor $[\mathbf{M}]$ vollen Rang hat. In [Sha14] wird dies auch für überbestimmte IGS bewiesen, wobei es in diesem Fall möglich ist, dass die Lösungsmenge bei widersprüchlichen Daten leer ist.

In [Sha02] wird die in dieser Arbeit eingesetzte Lösungsmenge (3.5) als *vereinigte* (engl. united) Lösungsmenge bezeichnet. Weiterhin wird darin eine *akzeptable* (engl.

tolerable) Lösungsmenge

$$\mathcal{D}_{\vartheta, \text{ akz}} = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^\ell \mid \forall \mathbf{M} \in [\mathbf{M}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}] \quad (\mathbf{M}\vartheta = \mathbf{y}) \right\} \quad (3.6)$$

sowie eine *steuerbare* (engl. controllable) Lösungsmenge

$$\mathcal{D}_{\vartheta, \text{ ste}} = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^\ell \mid \exists \mathbf{M} \in [\mathbf{M}], \forall \mathbf{y} \in [\mathbf{y}] \quad (\mathbf{M}\vartheta = \mathbf{y}) \right\} \quad (3.7)$$

definiert. Allgemein gibt es eine Vielzahl an Lösungsmengen, welche durch Austausch der einzelnen Bedingungen \forall und \exists für Teile der Größen $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{y}]$ gebildet werden und als *AE-Lösungsmengen* bezeichnet werden. Die Lösungsmenge (3.5), welche bei der Parameteridentifikation allgemeiner Modelle die Parametermenge beschreibt, stellt die geringsten Anforderungen der *AE-Lösungsmengen* dar und wird in der Literatur (z. B. [Hla15]) in diesem Zusammenhang als *schwache* (engl. weak) Lösungsmenge bezeichnet.

Quadratische Gleichungssysteme

Zu Lösung eines quadratischen IGS stehen direkte Verfahren wie das *gaußsche Eliminationsverfahren* oder indirekte Verfahren zur Verfügung [MKC09]. Dabei sind die indirekten Verfahren den direkten im Allgemeinen bezüglich Rechenzeit und erreichbarer Genauigkeit des Einschlusses überlegen, weshalb der Fokus hier auf die indirekten Methoden gelegt wird. In [May09] werden verschiedene direkte Verfahren ausführlich betrachtet.

Zur Anwendung der indirekten Verfahren ist es vorteilhaft, das IGS mit einem *Präkonditionierer* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ zu multiplizieren und somit das modifizierte Gleichungssystem

$$\mathbf{C}[\mathbf{M}][\vartheta] = \mathbf{C}[\mathbf{y}]. \quad (3.8)$$

zu betrachten. Wird dabei ein regulärer Präkonditionierer verwendet, stimmen die Lösungsmengen der Gleichungssysteme mit und ohne Präkonditionierer überein. Andernfalls ist die Lösungsmenge des präkonditionierten Systems eine Obermenge des ursprünglichen Gleichungssystems [Bee06]. Eine häufig getroffene Wahl des Präkonditionierers stellt die inverse Mittelpunktmatrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_m^{-1} \quad (3.9)$$

dar. Weitere Präkonditionierer werden beispielsweise in [Bee06] betrachtet.

Eine bekannte indirekte Lösungsmethode stellt die *Krawczyk-Methode* dar [MKC09], welche bereits 1969 in [Kra69] vorgestellt wurde. Für dieses Verfahren muss der Prädiktionierer so gewählt werden, dass

$$\left\| [\mathbf{E}] \right\|_{\infty} = \left\| \mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{M}] \right\|_{\infty} < 1 \quad (3.10)$$

erfüllt ist. Für den Prädiktionierer (3.9) ist dies meist erfüllt. Bei der Krawczyk-Methode muss ein initialer Einschuss $[\boldsymbol{\vartheta}]^{(0)} \supseteq \mathcal{D}_{\boldsymbol{\vartheta}}$ der Lösungsmenge bekannt sein, welcher im Verlauf des Verfahrens iterativ mit $[\boldsymbol{\vartheta}]^{(i)} \subseteq [\boldsymbol{\vartheta}]^{(i-1)}$ verkleinert wird. Durch diese iterative Verkleinerung des Einschusses wird das Verfahren als *Kontraktionsverfahren* bezeichnet [JKDW01]. Im Anhang A.1 ist eine mathematische Beschreibung der Vorgehensweise angegeben.

Auch bei der *Hansen-Blick-Rohn-Ning-Kearfott-Neumaier-Methode* wird ein prädiktioniertes IGS gelöst [Neu99]. Durch die Prädiktionierung muss bei diesem Verfahren sichergestellt werden, dass der modifizierte Regressor $\mathbf{C}[\mathbf{M}]$ eine *H-Matrix* wird, was für den Prädiktionierer (3.9) meist erfüllt ist. Eine vollständige Beschreibung des Verfahrens ist in Anhang A.2 angegeben. Das in INTLAB⁷ implementierte Verfahren zur Lösung von IGS *verifylss* basiert auf einer modifizierten und verbesserten Implementierung dieses Verfahrens [Rum13], wobei eine Kombination mit der Krawczyk-Methode umgesetzt wurde [Har02].

Eine weitere häufig eingesetzte indirekte Lösungsmethode stellt das *prädiktionierte Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren* dar [Bee06; Wol10]. Bei diesem Verfahren handelt es sich wie bei der *Krawczyk-Methode* um ein Kontraktionsverfahren, welches den initialen Lösungseinschluss eines prädiktionierten IGS verbessert. In Anhang A.3 wird das Verfahren mit den erforderliche Gleichungen beschrieben. Ein Vorteil des Verfahrens ist, dass bei der komponentenweisen Berechnung alle bereits verbesserten Einschüsse der anderen Elemente ebenfalls berücksichtigt werden und das Verfahren somit schneller konvergiert [Wol10].

Alle soeben vorgestellten Verfahren zur Lösung eines quadratischen IGS liefern einen unterschiedlich engen Einschuss der Lösungsmenge des IGS. Die Größe der dabei auftretenden Überapproximation hängt zudem stark vom betrachteten IGS ab. Daher wird in Kapitel 5 eine Kombination aus mehreren der hier vorgestellten Verfahren eingesetzt, um deren jeweilige Vorteile auszunutzen.

⁷In dieser Arbeit wird INTLAB in Version 7.1 eingesetzt.

Überbestimmte Gleichungssysteme

Bei der Parameteridentifikation werden im Allgemeinen viele Messpunkte aufgenommen, um den Einfluss von Störungen auf das Identifikationsergebnis zu minimieren. Bei der Formulierung als IGS (3.4) führt dies zu einem überbestimmten Gleichungssystem mit $m \gg \ell$. Hierfür können zwei unterschiedliche Lösungsmengen [HH13] angegeben werden:

1. *Strikte Lösung*: Die strikte Lösung wird wie im quadratischen Fall durch die Lösungsmenge

$$\mathcal{D}_{\vartheta_S} = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^\ell \mid \exists \mathbf{M} \in [\mathbf{M}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}] \quad (\mathbf{M}\vartheta = \mathbf{y}) \right\} \quad (3.11)$$

beschrieben. Diese Lösungsmenge beinhaltet alle Parameter ϑ , die mit den vorliegenden Messdaten konsistent sind. Es sind somit nur die Parameter enthalten, die mit einer reellwertigen Kombination aus $[\mathbf{M}]$ und $[\mathbf{y}]$ zu einer eindeutigen Lösung führen. Durch diese Definition ist es möglich, dass bei widersprüchlichen Daten das Ergebnis die leere Menge \emptyset darstellt. Dies stellt ein Indiz dar, dass bei der Auswahl der Modellstruktur oder der Messdatenaufnahme Fehler gemacht wurden.

2. *LS-Lösung*: Bei der LS-Lösung, welche durch

$$\mathcal{D}_{\vartheta_{LS}} = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^\ell \mid \forall \mathbf{M} \in [\mathbf{M}], \forall \mathbf{y} \in [\mathbf{y}] \quad \vartheta = \arg \min_{\vartheta} \|\mathbf{M}\vartheta - \mathbf{y}\| \right\} \quad (3.12)$$

beschrieben ist, handelt es sich um eine Erweiterung des klassischen LS-Verfahrens. Diese Lösungsmenge stellt anschaulich beschrieben die Vereinigung aller LS-Lösungen dar, welche für alle Kombinationen der in $[\mathbf{M}]$ und $[\mathbf{y}]$ enthaltenen reellwertigen Matrizen möglich sind. Es handelt sich somit um eine Verallgemeinerung bzw. Obermenge der strikten Lösung (3.5), da diese als exakte Lösung immer die Norm in (3.12) minimiert und somit enthalten ist. Im Gegensatz zur strikten Lösung ist diese Lösungsmenge jedoch auch dann nicht leer, wenn kein enthaltenes reellwertiges System die Bedingungen des Gleichungssystems erfüllt.

Um bei der Parameteridentifikation mittels eines überbestimmten IGS eine garantierte Aussage zur identifizierten Parametermenge zu ermöglichen muss die strikte Lösung (3.11) eingesetzt werden. Nur mit dieser Lösung kann eine Verletzung der Voraussetzungen bzw. Annahmen detektiert werden, da die Lösungsmenge bei widersprüchlichen Daten leer ist, im Gegensatz zur LS-Lösung (3.12).

Die bereits vorgestellten Verfahren zur Lösung quadratischer IGS können allgemein nicht direkt zur Lösung des überbestimmten Falls eingesetzt werden. Lediglich das *Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren* kann nach [Bee06] zur Lösung überbestimmter IGS erweitert werden. Eine Möglichkeit, die Verfahren trotzdem zu nutzen, stellt die Erweiterung des überbestimmten Gleichungssystems zu einem quadratischen System

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{M}] & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{M}]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\boldsymbol{\vartheta}] \\ [\boldsymbol{\Xi}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{y}] \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

dar [Rum83]. Dadurch erhöht sich die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems auf $(m + \ell) \times (m + \ell)$, was für realistische Identifikationsdatensätze ($m \gg 100$) zu sehr großen Matrizen mit entsprechendem Rechen- und Speicheraufwand führt. Sofern Verfahren mit diesem Ansatz dennoch eingesetzt werden, stellt das Ergebnis einen Einschluss der LS-Lösung (3.12) des überbestimmten IGS dar [HH13]. Die Funktion *verifylss* aus INTLAB implementiert diesen Ansatz [Rum12].

Ein wesentlicher Nachteil des erweiterten Gleichungssystems (3.13) stellt der Abhängigkeits-Effekt dar (vgl. Abschnitt 2.2.2), da durch die Erweiterung die Elemente der Matrix $[\mathbf{M}]$ zweimal im erweiterten Gleichungssystem enthalten sind. In [Pop06] wird von Evgenija Popova ein Verfahren vorgestellt, welches diese Abhängigkeiten explizit berücksichtigt und somit zu einem engen Einschluss der Lösung kommt. Es handelt sich jedoch auch bei diesem Verfahren um einen Einschluss der LS-Lösung.

Einen anderen Ansatz verfolgt eine von Jiří Rohn vorgestellte Methode, welche nach [Roh95; Roh96] eine strikte Lösung des IGS bestimmt. In dem Verfahren wird zunächst eine LS-Lösung für eine reellwertige Kombination von $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$ und $\mathbf{y} \in [\mathbf{y}]$ bestimmt und diese dann geeignet zu Intervallen erweitert. Die Erweiterung zur Intervalllösung erfolgt dabei iterativ. Da die Wahl von $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$ und $\mathbf{y} \in [\mathbf{y}]$ beliebig ist, lässt sich die Lösung durch Wiederholung des Verfahrens mit anderen Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{y} verbessern, indem die Schnittmenge der Lösungen bestimmt wird. Im Anhang A.4 wird das Verfahren näher vorgestellt. Für einen Vergleich verschiedener Verfahren für überbestimmte IGS sei auf [HH13] verwiesen.

Die beschriebenen Verfahren für überbestimmte IGS können auch für den quadratischen Fall eingesetzt werden und bestimmen dann einen Einschluss der Lösungsmenge (3.5). Dies wird in Kapitel 5 für die Verfahren von Popova und Rohn ausgenutzt, indem sie mit den Verfahren aus Abschnitt 3.2.1 kombiniert werden.

3.2.2 Lineare Optimierung mit Intervallen

Ein weiterer Ansatz zur Parameteridentifikation basiert wie die Verfahren im vorherigen Abschnitt auf dem überbestimmten Gleichungssystem (3.4). Im Gegensatz zu den dort beschriebenen Verfahren wird nun ein lineares Optimierungsproblem zur Bestimmung eines Einschusses der Lösungsmenge aufgestellt. Diese Vorgehensweise basiert auf dem *Oettli-Prager-Theorem* [OP64], welches

$$\left(\exists \mathbf{M} \in [\mathbf{M}], \exists \mathbf{y} \in [\mathbf{y}], \mathbf{M}\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{y} \right) \Leftrightarrow |\mathbf{M}_m \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{y}_m| \leq \mathbf{M}_\Delta |\boldsymbol{\vartheta}| + \mathbf{y}_\Delta \quad (3.14)$$

lautet und beispielsweise in [Roh89] bewiesen wird. Für die Formulierung als lineares Optimierungsproblem muss die Ungleichung in (3.14) ohne Beträge umformuliert werden, weshalb sie in die zwei Ungleichungen

$$\mathbf{M}_m \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{y}_m \leq \mathbf{M}_\Delta |\boldsymbol{\vartheta}| + \mathbf{y}_\Delta \quad \text{für } \mathbf{M}_m \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{y}_m \leq 0, \quad (3.15a)$$

$$-(\mathbf{M}_m \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{y}_m) \leq \mathbf{M}_\Delta |\boldsymbol{\vartheta}| + \mathbf{y}_\Delta \quad \text{für } \mathbf{M}_m \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{y}_m \geq 0 \quad (3.15b)$$

aufgeteilt wird [HH13]. Die hierbei verbleibenden Beträge stellen einen Hinweis auf die nichtkonvexe Struktur der Lösungsmenge zu Gleichung (3.4) dar. In [Cer96] wird gezeigt, dass diese Lösungsmenge jedoch als Vereinigung von maximal 2^ℓ konvexen Teilmengen gebildet wird, wobei jede dieser Teilmengen in einem einzelnen Orthanten⁸ des ℓ -dimensionalen Parameterraums liegt. Daher wird die Berechnung der Lösungsmenge für jeden Orthanten $\boldsymbol{\alpha}$ separat durchgeführt, wobei dieser mittels der Diagonalmatrix $\mathbf{D}_\alpha \in \{-1, 0, 1\}^{\ell \times \ell}$ mit den Diagonalelementen

$$\alpha_j = \text{sign}(\vartheta_j) \quad j = 1 \dots \ell \quad (3.16)$$

ausgewählt wird. Nun kann ein Einschluss der Lösungsmenge durch

$$\mathcal{D}_\vartheta(\boldsymbol{\alpha}) \subset \left\{ \boldsymbol{\vartheta} \mid \begin{pmatrix} (\mathbf{M}_m - \mathbf{M}_\Delta \mathbf{D}_\alpha) \boldsymbol{\vartheta} \leq \mathbf{y}_m + \mathbf{y}_\Delta \\ -(\mathbf{M}_m + \mathbf{M}_\Delta \mathbf{D}_\alpha) \boldsymbol{\vartheta} \leq -\mathbf{y}_m + \mathbf{y}_\Delta \end{pmatrix} \right\} \quad (3.17)$$

beschrieben werden. Für die Bestimmung des Einschusses müssen in jedem Orthanten somit 2ℓ Optimierungsprobleme

$$\bar{\vartheta}_j = \max \vartheta_j \quad (3.18a)$$

$$\underline{\vartheta}_j = \min \vartheta_j \quad (3.18b)$$

⁸Orthant: Mehrdimensionale Verallgemeinerung des zweidimensionalen Quadranten bzw. des dreidimensionalen Oktanten.

mittels linearer Programmierung entsprechend der Mengendefinition (3.17) gelöst werden. Für die Gesamtlösung

$$\mathcal{D}_\vartheta \subset \bigcup_{\alpha} \mathcal{D}_\vartheta(\alpha) \quad (3.19)$$

bedeuten die insgesamt $2\ell \cdot 2^\ell$ Optimierungsprobleme einen hohen Rechenaufwand.

Die Anzahl der notwendigen Optimierungen kann nach [HH13] deutlich reduziert werden, indem mit anderen Verfahren vorab ein Einschluss der Lösungsmenge bestimmt wird und die Optimierung somit auf die tatsächlich relevanten Orthanten beschränkt wird. Auf die sehr hohe Qualität des Lösungseinschlusses hat diese Reduktion keinen Einfluss.

3.2.3 Mengeninversion

In [JW93a] wird ein Verfahren zur Mengeninversion vorgestellt, welches in [JKDW01] detailliert beschrieben wird. Ausgangspunkt stellt eine *Intervallfunktion* $[\mathbf{f}]$ (engl. inclusion function) dar, welche als Intervallerweiterung (siehe z. B. [JKDW01]) einer reellwertigen Funktion \mathbf{f} gebildet wird. Die Funktion $[\mathbf{f}]$, welche nicht linear sein muss, bildet eine Ursprungsmenge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^\ell$ auf die Zielmenge $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$ ab. Ziel der Mengeninversion ist es, für eine bekannte Zielmenge und eine bekannte Funktion die Ursprungsmenge

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y}\} = \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{Y}) \quad (3.20)$$

zu bestimmen, welche somit als Lösungsmenge der Mengeninversion betrachtet wird.

Zur Lösung dieser Aufgabenstellung kann das SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) genannte Verfahren eingesetzt werden [JKDW01; JW93a]. Der Algorithmus basiert auf einer initialen Lösungsmenge \mathcal{X}_0 , welche die tatsächliche Ursprungsmenge enthalten muss. Diese initiale Lösungsmenge wird mittels *Bisektion* sequenziell so lange aufgeteilt, bis für jede der Teilmengen eine Aussage möglich ist oder die Größe der Teilmengen eine vom Anwender vorgegebene Schranke unterschreitet. Für die *Unterteilung* (engl. subpaving) der Lösungsmenge \mathcal{X} werden Intervalle $[\mathbf{x}]$ eingesetzt, sodass die Lösungsmenge aus vielen mehrdimensionalen Boxen zusammengesetzt wird. Für jede der Teilmengen wird mittels der Intervall-Funktion $[\mathbf{f}]$ überprüft, ob das betrachtete Intervall ein Teil der Lösungsmenge ist. Dabei sind folgende Fälle möglich:

Fall 1: Wenn $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset \mathcal{Y}$, dann gehört $[\mathbf{x}]$ zur Lösungsmenge \mathcal{X} .

Fall 2: Wenn $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathcal{Y} = \emptyset$, dann gehört $[\mathbf{x}]$ nicht zur Lösungsmenge \mathcal{X} .

Fall 3: Wenn $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ und die Größe des Intervalls über einer vorgegebenen Schranke liegt, dann wird die Box $[\mathbf{x}]$ in zwei gleiche Teile $[\mathbf{x}_1]$ und $[\mathbf{x}_2]$ aufgeteilt und SIVIA für jede der beiden Teilmengen angewandt.

Fall 4: Wenn $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ und die Größe des Intervalls unter der vorgegebenen Schranke liegt, dann wird diese Teilmenge als unbestimmt bezeichnet.

Bei dieser Vorgehensweise wird die Lösungsmenge nicht exakt bestimmt, sondern durch zwei Mengen eingeschlossen. Zum einen wird durch den ersten Fall ein innerer Einschluss $\underline{\mathcal{X}}$ bestimmt. Zum anderen bildet die Vereinigung von Fall eins und vier einen äußeren Einschluss $\overline{\mathcal{X}}$ der Lösungsmenge. Insgesamt gilt somit:

$$\underline{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \overline{\mathcal{X}}. \quad (3.21)$$

Die geometrische Form der beiden Einschlüsse der Lösungsmenge kann dabei sehr kompliziert werden, insbesondere falls es sich um eine nichtlineare Funktion handelt. Durch die dabei mögliche Flexibilität zur Definition der Intervallfunktion kann SIVIA für viele Anwendungsbereiche wie beispielsweise die Parameteridentifikation linearer und nichtlinearer Systeme genutzt werden.

Ein Nachteil des Verfahrens ist, dass die Rechenzeit des Verfahrens exponentiell mit der Dimension des Lösungsraumes ℓ wächst, was die Anwendbarkeit stark einschränkt [JW93a]. Daher wird z. B. in [JKDW01] empfohlen, mittels Kontraktionsverfahren die Anzahl der zu untersuchenden Intervalle bei der Bisektion zu reduzieren. In [HGT⁺12] wird eine effiziente Implementierung des Verfahrens vorgestellt, welche durch den verstärkten Einsatz von vektoriiellen Operationen geprägt ist.

In [JKDW01] wird beschrieben, wie anstatt einer Intervalleinschluss-Funktion $[\mathbf{f}]$ ein allgemeinerer Test genutzt werden kann, welcher die Zugehörigkeit zur Lösungsmenge überprüft und als Ergebnis die Aussagen

1. Teil der Lösungsmenge,
2. nicht Teil der Lösungsmenge oder
3. unbestimmt

liefert. Diese Formulierung wird in [JKDW01] für die Parameteridentifikation genutzt. Die gesuchte Lösungsmenge \mathcal{X} entspricht dabei den unbekanntem Parametern $\mathcal{D}_{\mathcal{D}}$ und die Zielmenge \mathcal{Y} den gemessenen Ausgangsgrößen $[\mathbf{y}]$. Als Test für die Mengenzugehörigkeit wird dabei das ARX-Modell für die aktuell betrachtete Box im Parameterraum simuliert, wobei die unsicheren Eingänge $[\mathbf{u}]$ mit berücksichtigt werden. Mit dem simulierten Verlauf der Ausgangsgröße kann nun die Zugehörigkeit des betrachteten Intervalls zur Lösungsmenge analog zum allgemeinen Fall bei SIVIA untersucht werden:

Fall 1: Wenn die simulierte Ausgangsgröße für alle Abtastpunkte komplett im gemessenen Ausgangssignal enthalten ist, gehört das betrachtete Intervall zur Lösungsmenge.

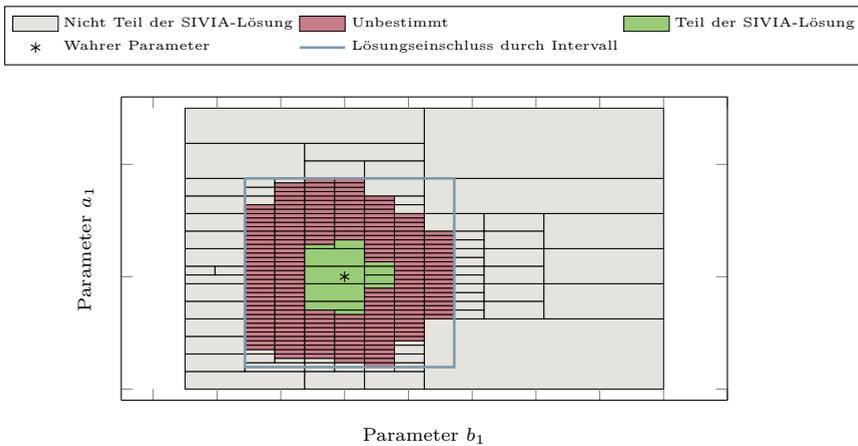


Abbildung 3.3: Beispiel eines zweidimensionalen Parameterraums mit der durch SIVIA betrachteten Aufteilung

Fall 2: Wenn die simulierte Ausgangsgröße für einen oder mehrere Abtastpunkte keine Überschneidung mit dem gemessenen Ausgangssignal aufweist, gehört das betrachtete Intervall nicht zur Lösungsmenge.

Fall 3 und 4: Wenn sich die simulierte Ausgangsgröße für alle Abtastpunkte mit dem gemessenen Ausgangssignal überschneidet, wird das Intervall wie im allgemeinen Fall weiter aufgeteilt, bis die Größe unter der Schwelle liegt.

Durch diese Vorgehensweise ergibt sich im Parameterraum eine Menge an Intervallen, deren Vereinigung die tatsächlichen Parameter beinhaltet. Für die weitere Verwendung kann diese komplizierte Lösungsmenge durch eine einfachere Beschreibungsform wie ein Intervall oder ein Ellipsoid eingeschlossen werden. Steht bereits bei der Berechnung die Form des Einschlusses fest, lassen sich Bisektionsschritte einsparen, sofern die untersuchte Teilmenge komplett in einem bereits bestimmten Einschluss enthalten ist. Dadurch kann der Rechenaufwand leicht reduziert werden.

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise ist in Abbildung 3.3 das Identifikationsergebnis für ein SISO-System 1. Ordnung dargestellt. Der in grün dargestellte Bereich wurde vom SIVIA-Verfahren dem inneren Einschluss der Lösungsmenge zugeordnet. In rot ist der unbestimmte Teil des Parameterraumes dargestellt, welcher zusammen mit dem grünen Teil den äußeren Einschluss der Lösung bildet. Die in grau dargestellten Bereiche sind nicht Teil der Lösungsmenge. Zusätzlich wurde als blaues Rechteck der Einschluss der resultierenden Lösungsmenge durch ein Intervall eingezeichnet. Der tatsächliche Parameter, der bei der Simulation zu Erzeugung der unsicheren Daten eingesetzt wurde, ist durch einen Stern gekennzeichnet.

3.2.4 Verfahren zum Einschluss der Parameter durch Ellipsoide

Außer den in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Möglichkeiten, Parameter durch Intervalle zu beschreiben, können Parameter beispielsweise auch durch Ellipsoide eingeschlossen werden. Zur Verdeutlichung wird hier das Verfahren aus [GS92] vorgestellt, welches auf den Veröffentlichungen [Che91; CYP91] beruht. In Kapitel 5 wird das Verfahren zur Parameteridentifikation eines Beispielsystems eingesetzt. Dieses MOVE (Modified Optimal Volume Ellipsoid) genannte Verfahren basiert auf der Systemdarstellung

$$\hat{y}(k) = \Phi^T(k)\vartheta + \nu_k, \quad (3.22)$$

eines SISO-ARX-Modells entsprechend Gleichung (2.9), welches von der beschränkten Störung ν_k mit

$$\underline{\gamma}_k \leq \nu_k \leq \bar{\gamma}_k \quad (3.23)$$

überlagert wird.

Es handelt sich um ein iteratives Verfahren⁹, welches ein vorgegebenes Ellipsoid $\mathcal{E}_0(\mathbf{c}, \mathbf{P})$ nach und nach verkleinert. Dabei wird das Ellipsoid in jedem Schritt zu einer Einheits-Hyperkugel transformiert, welche dann mit den durch die Unsicherheiten definierten Hyperebenen geschnitten wird. Diese angeschnittene Hyperkugel wird durch ein Ellipsoid eingeschlossen, welches nach Rücktransformation in den ursprünglichen Parameterraum den Ellipsoid-Einschluss der Parameter beschreibt. Im Anhang B.1 ist der MOVE-Algorithmus angegeben.

Da dieser Algorithmus nicht für den EIV-Ansatz, also den Fall von in Φ enthaltenen beschränkter Unsicherheit ξ , geeignet ist, wird in [GS92] ein zweistufiges Verfahren vorgeschlagen, um diese Unsicherheit zusätzlich zu berücksichtigen. Die Schwierigkeit dabei ist, dass sich die Unsicherheit in Φ durch die unbekannt Parameter ϑ entsprechend Gleichung (3.22) auf den Ausgang auswirkt. Das Verfahren schätzt in jedem Schritt zunächst basierend auf der aktuellen Schätzung des Parametereinschlusses Grenzen für den absoluten Fehler

$$\tilde{e}_k = \nu_k + \sum_{i=1}^{\ell} \vartheta_i \xi_{i,k}. \quad (3.24)$$

⁹Das Verfahren kann analog zum RLS-Verfahren eingesetzt werden, ohne dass der komplette Datensatz vorliegt.

Dazu wird die Unsicherheit ξ_k als ℓ -dimensionale Box betrachtet, deren Eckpunkte den größten bzw. kleinsten Gesamtfehler \tilde{e}_k hervorrufen. Zur Bestimmung dieses Fehlers werden somit das Maximum bzw. Minimum über alle der 2^ℓ Eckpunkte gesucht.

Sobald die Schranken des Gesamtfehlers vorliegen, wird ein Schritt des MOVE-Algorithmus durchgeführt, wobei anstatt der Schranken für ν_k die soeben bestimmten Schranken für e_k verwendet werden. Im Idealfall führt der MOVE-Schritt zu einer Verkleinerung des Parametereinschlusses, wodurch sich ebenfalls engere Schranken für die Gesamtunsicherheit e_k ergeben. Die beiden Schritte können somit iterativ wiederholt werden, bevor weitere Daten in das Verfahren eingebracht werden und der nächste Schritt des iterativen Verfahrens durchgeführt wird.

Das MOVE-Verfahren ist nicht das einzige Identifikationsverfahren mit Ellipsoiden in der Literatur, wird in dieser Arbeit jedoch wegen der Eignung für EIV-Probleme genutzt. Alternativ wird in [PPG11] z. B. ein Parameteridentifikationsverfahren mit Ellipsoiden für MIMO-Systeme beschrieben, welches jedoch aufgrund der eingesetzten OE-Modellform in dieser Arbeit nicht genutzt wird.

3.2.5 Verfahren zum Einschluss der Parameter durch Zonotope

Als weitere Einschlussmöglichkeit wurden in Kapitel 2 Zonotope vorgestellt, welche in [BAC06] zur Parameteridentifikation genutzt werden. Das Verfahren basiert wie die Parameteridentifikation mittels Ellipsoiden auf einem System mit den Gleichungen (3.22) und (3.23). Es handelt sich um ein iteratives Identifikationsverfahren¹⁰, welches jedoch nicht direkt für den EIV-Fall eingesetzt werden kann. Bei diesem Verfahren werden die betrachteten Daten des Regressors und des unsicheren Ausgangs in jedem Schritt als Band im Parameterraum betrachtet. Die Schnittmenge dieses Bandes mit dem Zonotop aus dem vorherigen Schritt stellt die möglichen Parameter dar, welche wiederum durch ein Zonotop eingeschlossen werden. Die Vorgehensweise ist somit ähnlich zur Parameteridentifikation durch Ellipsoide, die notwendigen Gleichungen sind im Anhang B.2 angegeben. In Abschnitt 5.1.2 wird dieses Verfahren zur Parameteridentifikation im EIV-Fall erweitert und anschließend für ein Beispielsystem eingesetzt.

¹⁰Das Verfahren kann analog zum RLS-Verfahren eingesetzt werden, ohne dass der komplette Datensatz vorliegt.

3.2.6 Weitere Möglichkeiten zur mengenbasierten Parameteridentifikation

In der Literatur gibt es eine Vielzahl weiterer Verfahren und Ansätze zur Parameteridentifikation. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der zur Black-Box-Identifikation notwendigen Ordnungsbestimmung liegt, können nicht alle Parameteridentifikationsverfahren aus der Literatur detailliert vorgestellt werden. Dieser Abschnitt soll dennoch einen kurzen Überblick über einige weitere Ansätze für unterschiedliche Anwendungsfälle bieten. Die Arbeit [MV91] stellt einen Überblick der bis zu deren Veröffentlichung gebräuchlichen Ansätze zur mengenbasierten Parameteridentifikation dar. Dabei werden nicht nur lineare, sondern auch grundlegend nichtlineare Problemstellungen berücksichtigt.

Die Schwierigkeit, dass das Parameteridentifikationsproblem mit zunehmender Datensatzlänge und Parameteranzahl für optimierungsbasierte Verfahren schnell komplex wird, ist Thema in [CR15]. Darin werden zwei Vorgehensweisen für sehr große Problemstellungen beschrieben um das nichtkonvexe Optimierungsproblem mittels *linearer Matrix-Ungleichungen* (LMI, Linear Matrix Inequality) zu einem konvexen Problem zu erweitern und dabei die Rechenzeit gering zu halten. Von derselben Arbeitsgruppe wurden in den letzten Jahren einige weitere Arbeiten veröffentlicht, die sich mit verschiedenen Aspekten der mengenbasierten Parameteridentifikation durch konvexe Optimierungsverfahren beschäftigen, beispielsweise [CPR11b; CPR12].

Auch für die mengenbasierte Identifikation von nichtlinearen Systemen gibt es Verfahren in der Literatur. In [JW93b] wird eine Vorgehensweise vorgestellt, welche in [JKDW01] wieder aufgegriffen wird und das bereits beschriebene SIVIA-Verfahren zur Parameteridentifikation nutzt. Dabei muss gegenüber dem linearen Fall lediglich eine für den nichtlinearen Fall angepasste Testfunktion für den Einschluss der Parameter eingesetzt werden. In [JKDW01] wird zudem beschrieben, wie es mittels *Bedingungsfortpflanzung* (engl. constraint propagation) möglich ist, Beschränkungen der Lösungsmenge bei der Parameteridentifikation zu berücksichtigen. Ein Verfahren zur Identifikation von zeitlich veränderlichen Parametern wird in [RSA16] vorgestellt. Das Verfahren beruht ähnlich zum SIVIA-Verfahren auf einer Unterteilung der Parametermenge, setzt diese jedoch in Form einer Prädiktor-Korrektor-Struktur ähnlich zum *Kalman-Filter* [Kál60] um.

Dagegen wird in [CLPR14] die Parameteridentifikation als nichtkonvexe Optimierung interpretiert, wobei der EIV-Fall betrachtet wird. Das darin vorgestellte Verfahren stellt ein zweistufiges Verfahren dar, welches zunächst die obere Schranke der Gewichtungsfunktion des Optimierungsproblems durch eine polynomische Funktion approximiert und dieses anschließend mittels *semidefiniter Programmierung* untersucht. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der Parameteridentifikation für

nichtlineare Systeme mit spezieller Modellstruktur, beispielsweise [BPS09; CPRT12] für *lineare Systeme mit variierenden Parametern* (LPV, Linear Parameter Varying) oder [BG99; CPR11a] für *Hammerstein-* bzw. *Wiener-Modelle*.

3.3 Mengenbasierte Fehlerdetektion

Eine häufige Anwendung von Modellen mit mengenbasierter Unsicherheit stellt die Fehlerdetektion dar. Dabei wird, wie in der klassischen Fehlerdetektion mit auf stochastischen Unsicherheiten basierenden Modellen, zunächst eine Auswahl geeigneter Kriterien getroffen, welche die Unterscheidung zwischen fehlerfreiem und fehlerhaftem Systemverhalten ermöglichen. Grundlegend wird zwischen der reinen Fehlerdetektion, also der Erkennung, dass ein Fehler aufgetreten ist, und der Fehlerisolation, also der Differenzierung um welchen Fehler es sich handelt, unterschieden. Ein wesentlicher Vorteil der mengenbasierten Fehlerdetektion ist die garantierte Aussage, dass ein Fehler vorliegen muss, wenn unter Berücksichtigung aller beschränkten Unsicherheiten keine Übereinstimmung von modelliertem und gemessenem Systemverhalten vorliegt. Umgekehrt können Fehler aufgrund der beim Umgang mit mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibungen auftretenden Überapproximationen jedoch auch bei übereinstimmendem Systemverhalten nicht ausgeschlossen werden. Zur Lösung dieses Problems kann anstelle eines äußeren Einschlusses ein innerer Einschluss der betrachteten Menge bestimmt werden, welche komplett in der entsprechenden Menge enthalten ist [Pui06]. Durch diesen inneren Einschluss kann auf den fehlerfreien Fall geschlossen werden, nicht jedoch auf das Vorliegen eines Fehlers.

Die mengenbasierte Fehlerdetektion kann nach [PIT06] grundlegend in die indirekte und die direkte Herangehensweise unterteilt werden. Bei der indirekten Vorgehensweise werden Kriterien im Parameterraum eingesetzt, bei der direkten Vorgehensweise dagegen werden Signalverläufe wie die Ausgangsgröße $[\mathbf{y}]$ zur Fehlerdetektion betrachtet. Zur Fehlerdetektion wird bei den mengenbasierten Verfahren in der Regel die Schnittmenge zwischen einer aus den Messdaten gewonnenen Wertemenge und der entsprechenden aus dem vorliegenden Modell gewonnenen Menge bestimmt. Der wesentliche Unterschied zwischen den unterschiedlichen Verfahren besteht somit darin, welche Mengen zur Fehlerdetektion ausgewählt werden.

Ein Vertreter der indirekten Vorgehensweise wird in [PIT06] vorgestellt. Das iterative Verfahren bestimmt anhand der gemessenen Daten in jedem Abtastschritt einen Bereich im Parameterraum, welcher mit den aktuell betrachteten Daten konsistent ist. Als Kriterium zur Fehlerdetektion wird die Schnittmenge aus dieser Parametermenge und den durch das Modell vorgegebenen Parametern betrachtet. Wenn diese Schnittmenge der leeren Menge entspricht, wenn also keine Überlappung der beiden

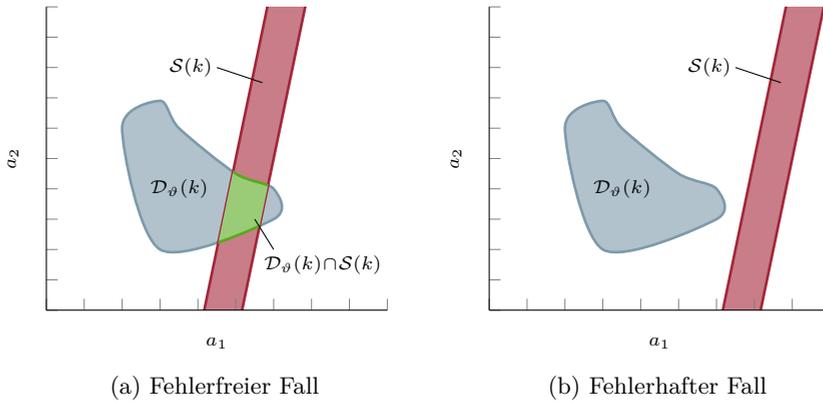


Abbildung 3.4: Prinzip der indirekten Fehlerdetektion

Parameteremengen besteht, muss ein Fehler vorliegen, da die gemessenen Daten nicht durch das Modell abgebildet sind. Für die Bestimmung der Parametermenge wird der im Abschnitt 3.2 vorgestellte SIVIA-Algorithmus in Kombination mit einem der Kontraktionsverfahren aus [JKDW01] eingesetzt.

In Abbildung 3.4 wird die Vorgehensweise der indirekten Fehlerdetektion anschaulich dargestellt. Abbildung 3.4(a) zeigt dabei den fehlerfreien Fall, in dem eine Überlapung der Parametermenge $\mathcal{D}_\vartheta(k)$ mit dem durch die Messung definierten Bereich $\mathcal{S}(k)$ im Parameterraum vorliegt. In Abbildung 3.4(b) dagegen ist diese Schnittmenge leer, weshalb garantiert ein Fehler vorliegen muss.

Bei den direkten Verfahren zur Fehlerdetektion werden stattdessen Kriterien eingesetzt, welche anhand berechneter oder direkt messbarer Signalverläufe Messung und Modell vergleichen. Weit verbreitet sind dabei *Zustandsmengenbeobachter* (engl. state-set observer), welche basierend auf Zustandsraummodellen in jedem Abtastschritt die Menge der mit dem Modell und den gemessenen Daten konsistenten Zustände bestimmen. Als Kriterium zur Detektion eines Fehlers bei diesem Ansatz wird diese Zustandsmenge eingesetzt, da eine leere Zustandsmenge auf das Vorliegen eines Fehlers schließen lässt. Der allgemeine Algorithmus zur Zustandsmengenbeobachtung für zeitdiskrete Systeme, angelehnt an die Darstellung in [Pla07], gliedert sich in die folgenden Schritte:

1. Berechnung der prädizierten Zustandsmenge,
2. Berechnung der Zustandsmenge für die aktuelle Messung,
3. Korrektur der Zustandsmenge,
4. Optional: Reduktion der Komplexität der Zustandsmenge.

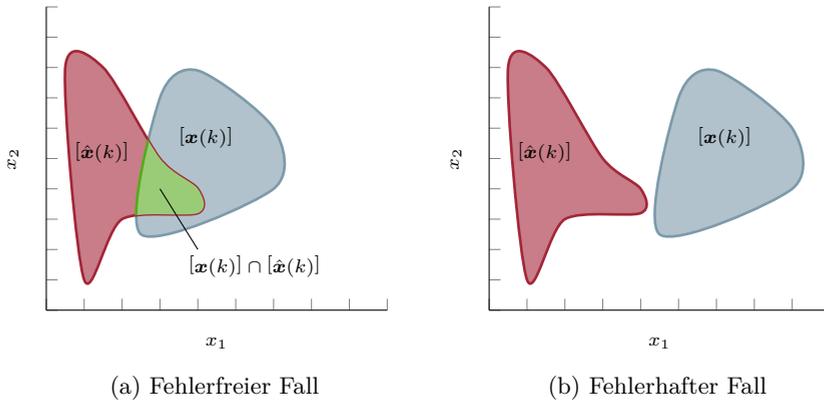


Abbildung 3.5: Prinzip der direkten Fehlerdetektion im Zustandsraum

Diese Vorgehensweise ist unabhängig von der eingesetzten Form der Unsicherheitsbeschreibung. Im ersten Schritt wird mittels der Zustandsgleichung des Modells eine Einschritt-Prädiktion der Zustandsmenge durchgeführt. Im zweiten Schritt wird basierend auf der aktuellen Messung und der Ausgangsgleichung des Modells eine Zustandsmenge bestimmt. Die Umsetzung dieses Schritts stellt eines der wesentlichen Unterscheidungsmerkmale zwischen verschiedenen Verfahren dar. Der dritte Schritt des Verfahrens bestimmt eine neue, kleinere Zustandsmenge, indem die Schnittmenge der Zustandsmengen aus Prädiktion und Messung gebildet wird. Je nach eingesetzter Unsicherheitsbeschreibung erhöht sich dabei die Komplexität, sodass optional ein Reduktionsschritt eingesetzt werden kann, um durch Überapproximation der korrigierten Zustandsmenge die Rechenzeit des Verfahrens konstant zu halten. Dies ist beispielsweise bei Polytopen oder Zonotopen erforderlich. Im dritten Schritt wird eine leere Zustandsmenge als Kriterium zur Fehlerdetektion genutzt. Die beschriebene Vorgehensweise beschränkt sich dabei nicht auf lineare Systeme, sondern kann bei entsprechender Formulierung der einzelnen Schritte auch für nichtlineare Systeme angewandt werden, wie z. B. in [Wol10] beschrieben. Abbildung 3.5 verdeutlicht dies für allgemeine Zustandsmengen. Im Fall einer Überlappung der prädizierten und der durch die Messung bedingten Zustandsmengen wird kein Fehler detektiert, was in Abbildung 3.5(a) dargestellt ist. Wenn keine Überlappung besteht, wie in Abbildung 3.5(b), wird der Fehler detektiert. Für eine tatsächliche Implementierung müssen die dargestellten Mengen durch geeignete Unsicherheitsbeschreibungen eingeschlossen werden.

In [Pla07] wird ein Zustandsmengenbeobachter für zeitdiskrete Zustandsraummodelle in Verbindung mit Polytopen zur Unsicherheitsbeschreibung eingesetzt. Die Bestimmung einer Zustandsmenge aus der aktuellen Messung wird hierbei durch

Formulierung eines Optimierungsproblems gelöst. Die Arbeit beschäftigt sich nicht nur mit der Fehlerdetektion, sondern auch mit der Fehlerisolation. Dazu werden Systemmodelle benötigt, welche den Fehler beinhalten und dessen Wirkung abbilden können. Es wird für jedes der Systemmodelle ein eigener Zustandsmengenbeobachter eingesetzt, welcher das Verhalten des fehlerhaften Systems beobachtet. Dabei stellen alle Modelle, welche mit den gemessenen Daten konsistent sind, mögliche Kandidaten für den aktuellen Status des Systems dar. Wenn das fehlerfreie Modell im Zustandsmengenbeobachter inkonsistent mit den Messdaten wird, liegt garantiert ein Fehler vor. Dabei können alle Fehler, deren Systemmodelle derzeit konsistent mit dem gemessenen Systemverhalten sind, am System aufgetreten sein. Eine eindeutige Fehlerisolation ist somit nur möglich, falls lediglich ein Systemmodell konsistent zu den Messdaten ist. In [BMRB07] werden ebenfalls Polytope eingesetzt, wobei die Berechnung der Zustandsmenge für die aktuelle Messung mittels des SIVIA-Verfahrens durchgeführt wird. Eine ähnliche Vorgehensweise wird in [ABC05; BSA⁺14b; GPIW06] eingesetzt, wobei zur Beschreibung der Unsicherheit Zonotope eingesetzt werden. Die Zustandsmenge im zweiten Schritt des Verfahrens wird durch geometrische Betrachtung des durch die Messung definierten Bandes im Zustandsraum durchgeführt.

Anstatt einer Fehlerdetektion im Zustandsraum verwendet [MPE08] direkt die Schnittmenge zwischen gemessener und beobachteter Ausgangsgröße des Systems. Zur Bestimmung der beobachteten Ausgangsgröße wird ein Intervall-Beobachter eingesetzt, welcher die Struktur des *Luenberger*-Beobachters aufweist. Die Rückführmatrix \mathbf{L} wird dabei gezielt gewählt, um die Auswirkung des Wrapping-Effekts (vgl. Abschnitt 2.2.2) zu minimieren. Auch in [TB14] wird ein Intervall-Beobachter eingesetzt, welcher intern mit Polytopen arbeitet. Diese Vorgehensweise wird schematisch in Abbildung 3.6 dargestellt, wobei die Unsicherheit der einzelnen Ausgänge durch Intervalle beschrieben wird. Eine leere Schnittmenge zwischen Prädiktion und Messung, wie in Abbildung 3.6(b) dargestellt, führt zur Detektion des Fehlers. In Abbildung 3.6(a) dagegen besteht eine Überlappung, weshalb von einem fehlerfreien System ausgegangen wird.

In [Pui06] wird eine Kombination aus direktem und indirektem Verfahren zur Fehlerdetektion eingesetzt, welche *Vorwärts-Rückwärts-Test* genannt wird. Dabei wird zunächst ein innerer Einschluss der Ausgangsgröße wie bei den direkten Verfahren bestimmt, um den fehlerfreien Fall zu detektieren. Wenn dieser Test nicht erfolgreich ist, wird wie in den indirekten Verfahren eine verbesserte Parametermenge bestimmt, um das Vorliegen eines Fehlers zu bestätigen. Dennoch können auch bei diesem Verfahren Fälle auftreten, bei denen keine Aussage über das Vorliegen eines Fehlers möglich sind, falls beide Tests fehlschlagen.

In den letzten Jahren wurden mehrere Publikationen zur mengenbasierten Fehlerdetektion bei nichtlinearen Systemen veröffentlicht. So wird beispielsweise in [RVZ10]

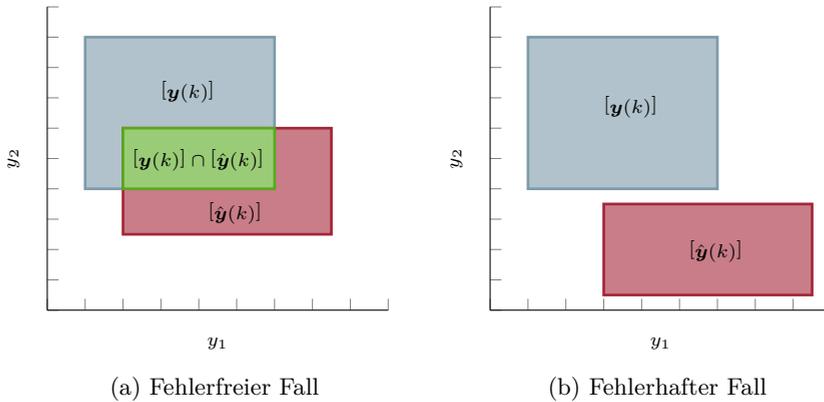


Abbildung 3.6: Prinzip der direkten Fehlerdetektion im Ausgangsraum

ein Intervall-Beobachter mit *Luenberger*-Struktur für allgemeine zeitkontinuierliche, nichtlineare Systeme im Zustandsraum vorgestellt, welcher intern eine Approximation als quasi-LPV-Modell nutzt. In [Wol10] wird die Vorgehensweise des Zustandsmengenbeobachters ebenfalls für zeitkontinuierliche, nichtlineare Systeme angewandt. Mit zeitdiskreten LPV-Systemen dagegen beschäftigen sich beispielsweise die Arbeiten [ERZ13] (Intervallbeobachter in Luenberger-Struktur), [BPB10] (Paritätsgleichungen für IO-Modelle mittels Optimierung) sowie [MPB12] (LPV-Beobachter mit Zonotopen). In [MRT15] wird ein Verfahren zur Fehlerdetektion bei *hybriden Systemen* vorgestellt, welche auf der Parameteridentifikation mittels einer speziell angepassten Version des SIVIA-Algorithmus basiert. Es handelt sich dabei um ein indirektes Verfahren zur Fehlerdetektion.

3.4 Zusammenfassung und Überblick

Das dritte Kapitel dieser Arbeit stellte den aktuellen Stand der Forschung und Technik im Bereich der Identifikation und Fehlerdetektion mit beschränkter Unsicherheit vor. Dabei wurde festgestellt, dass es zwar viele Verfahren zur Parameteridentifikation für Systeme mit beschränkter Unsicherheit in der Literatur gibt, jedoch kein vollständiges Verfahren zur Black-Box-Identifikation. Insbesondere ist keine Methode zur Bestimmung der Modellordnung direkt aus den mengenbasierten Messdaten bekannt. Eine Methode zum Schließen dieser Lücke in der Literatur wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

Da die Parameteridentifikation auch bei Black-Box-Identifikation notwendig ist, wurden im dritten Kapitel verschiedene Möglichkeiten zur Identifikation von Parametermengen vorgestellt, die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Den Schwerpunkt bildeten dabei auf Intervallgleichungssystemen basierende Verfahren. Dazu wurden unterschiedliche Definitionen möglicher Lösungsmengen ebenso betrachtet, wie einige Verfahren zur Lösung von quadratischen und überbestimmten Gleichungssystemen. Zusätzlich wurden Identifikationsverfahren für weitere Formen zum Einschluss der Parametermengen kurz vorgestellt. Betrachtet wurden ein Einschluss durch Ellipsoide und Zonotope sowie ein allgemeiner, durch Bisektion gebildeter Einschluss. Insgesamt gibt es eine große Anzahl unterschiedlicher Ansätze zur Parameteridentifikation in der Literatur, von denen eine repräsentative Auswahl vorgestellt wurde.

Eine mögliche Anwendungsmöglichkeit für identifizierte Modelle mit beschränkter Unsicherheit stellt die Fehlerdetektion dar. Es gibt zwei unterschiedliche Ansätze wie dabei die mengenbasierten Modelle genutzt werden können. Bei den indirekten Verfahren zur Fehlerdetektion werden aus den Modellen und Messdaten Wertemengen im Parameterraum gewonnen und zur Fehlerdetektion genutzt, die direkten Fehlerdetektionsverfahren basieren auf signalbasierten Kriterien. Für beide Ansätze wurden einige Vertreter vorgestellt. Mit den vorgestellten Ansätzen ist es möglich durch Nutzung der mengenbasierten Modelle und Daten eine garantierte Aussage zum Vorliegen eines Fehlers zu treffen. In den Kapiteln 5 und 6 wird die Fehlerdetektion als Anwendungsbeispiel für die identifizierten Modelle demonstriert.

Kapitel 4

Ordnungsbestimmung bei beschränkter Unsicherheit

Die im vorherigen Kapitel vorgestellten Verfahren zur Parameteridentifikation bei beschränkter Unsicherheit benötigen vorab Kenntnis über die Modellstruktur und die Modellordnung. In diesem Kapitel wird nun eine Möglichkeit vorgestellt, die Modellordnung von linearen, zeitinvarianten Systemen direkt aus den vorliegenden Messdaten mit beschränkter Unsicherheit zu bestimmen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Modellen in ARX-Darstellung, Modelle in Zustandsraumdarstellung werden allerdings an einigen Stellen ebenfalls betrachtet. Teile dieses Kapitels wurden in den Vorveröffentlichungen [ZBD13; ZBD14a; ZBD14b; ZBD14c] vorab publiziert.

Im ersten Abschnitt des Kapitels wird die Grundidee des Verfahrens beschrieben, zunächst für Systeme mit einer Ausgangsgröße. Dabei wird der theoretische Fall betrachtet, dass keine Unsicherheit in den Daten vorhanden ist. Anhand dieser Daten werden die verwendeten Datenstrukturen vorgestellt und die Untersuchung der Systemordnung beschrieben. Dieser Abschnitt beschränkt sich dabei auf Systeme mit nur einer Ausgangsgröße. Im zweiten Abschnitt wird diese Grundidee für den Fall mit beschränkter Unsicherheit erweitert. Wie zuvor werden dabei Systeme mit einer Ausgangsgröße betrachtet. Außerdem werden die Grenzen des Verfahrens und die daraus resultierenden Anforderungen an die Messdaten diskutiert. Anhand eines simulativen Beispiels wird die Vorgehensweise demonstriert. Eine Erweiterung auf MIMO-Systeme erfolgt im dritten Abschnitt des Kapitels. Dabei kann es mehrere Modelle unterschiedlicher Ordnung geben, welche dasselbe Systemverhalten beschreiben, sodass eine Modellauswahl erforderlich ist. Das vorgestellte Verfahren kann eingesetzt werden, um die minimale Modellordnung zu finden. Abschließend werden Optimierungsmöglichkeiten zur Verringerung des Rechenaufwands vorgestellt. Auch in diesem Abschnitt wird anhand simulierter Beispiele die Vorgehensweise verdeutlicht. Am Ende des Kapitels erfolgt eine kurze Zusammenfassung der in diesem Kapitel vorgestellten Methode zur Ordnungsbestimmung bei beschränkter Unsicherheit.

4.1 Grundidee ohne Unsicherheitsbetrachtung

Dieser Abschnitt stellt die Grundidee des Verfahrens zur Ordnungsbestimmung anhand von Systemen mit einer Ausgangsgröße, also SISO- und MISO-Systemen, vor. Dabei wird auf die Betrachtung von Unsicherheiten verzichtet und stattdessen das ungestörte, wahre System betrachtet. Somit entsprechen die Messdaten

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_{\text{wahr}}(k), \quad (4.1a)$$

$$y(k) = y_{\text{wahr}}(k) \quad (4.1b)$$

den reellwertigen, idealen Ein- und Ausgängen des Systems. Die Voraussetzungen der Identifikation bleiben zunächst dieselben wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben. Insbesondere ist eine genügende Anregung der Eingangssignale notwendig, um die korrekte Bestimmung der Systemordnung zu ermöglichen. Bei MISO-Systemen ist darauf zu achten, dass die verschiedenen Eingänge durch unterschiedliche oder zumindest zeitlich stark verschobene Signalverläufe angeregt werden, um eine genügende Anregung der Systemeingänge sicherzustellen.

4.1.1 Aufbereitung der Messdaten

Für die Ordnungsbestimmung müssen die Ein- und Ausgangsdaten in einer Datenmatrix angeordnet werden. Dazu werden zunächst die Daten jedes Abtastschritts k zu einem Datenvektor

$$\mathbf{z}(k) = (u_1(k) \quad \cdots \quad u_{n_u}(k) \quad y(k))^T \quad (4.2)$$

zusammengefasst. Diese Datenvektoren werden als Matrix angeordnet, indem die aufeinanderfolgenden Datenvektoren für $k = 1 \dots N$ die Spalten der Matrix bilden und diese p -fach wiederholt und jeweils um einen Abtastschritt verschoben werden. Diese Matrix

$$\mathbf{Z}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^T(1) & \mathbf{z}^T(2) & \cdots & \mathbf{z}^T(p) \\ \mathbf{z}^T(2) & \mathbf{z}^T(3) & \cdots & \mathbf{z}^T(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{z}^T(N-p) & \mathbf{z}^T(N-p+1) & \cdots & \mathbf{z}^T(N-1) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

der Dimension $(N-p) \times p \cdot (n_u + 1)$ stellt eine *Block-Hankel*-Matrix dar, da auf den Blockdiagonalen von rechts oben nach links unten jeweils dieselben Vektoren $\mathbf{z}(k)$ eingetragen sind. Die *Hankel*-Struktur wird damit durch Blöcke der Dimension $1 \times n_u + 1$ gebildet.

Wenn nicht durch a-priori Wissen sichergestellt ist, dass ein System ohne Durchgriff vorliegt, muss die Matrix \mathbf{Z}^* erweitert werden, um diesen abzubilden. Dazu wird die Matrix um eine Blockspalte der Eingangssignale

$$\mathbf{Z} = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} \mathbf{u}^T(p+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T(N) \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}^* & \end{array} \right) \quad (4.4)$$

ergänzt. Bei der Matrix \mathbf{Z} handelt es sich nicht mehr um eine Block-Hankel-Matrix, da bei der Ergänzung mit dem Block der Eingangssignale keine Ausgangsspalte hinzugefügt wird. Die Datenmatrix \mathbf{Z} bzw. \mathbf{Z}^* hat somit

$$c_{\mathbf{Z}^*} = p + p \cdot n_u \quad \text{bzw.} \quad (4.5a)$$

$$c_{\mathbf{Z}} = p + p \cdot n_u + n_u \quad (4.5b)$$

Spalten. Die Anzahl der Zeilen in der Datenmatrix entspricht $N - p$ und ist somit abhängig von der Länge des vorhandenen Datensatzes, sowie von der Anzahl der Blockspalten. Der Ausgangswert $y(N)$ zum Abtastpunkt N ist dabei nicht in der Datenmatrix für die Ordnungsbestimmung enthalten und wird erst bei der Parameteridentifikation genutzt. Die so aufgestellte Matrix der Messdaten könnte als Regressor zur Schätzung eines ARX-Modells (2.10) der Ordnung p entsprechend dem Gleichungssystem (2.9) genutzt werden, wenn die Anzahl der Blockspalten p passend zur noch unbekanntem Ordnung des Systems gewählt wird. Im folgenden Abschnitt wird beschrieben wie diese bestimmt wird.

4.1.2 Analyse der Datenmatrix

Bei der Bestimmung der Systemordnung n_{ARX} muss nun eine Wahl der Anzahl an Blockspalten p getroffen werden. Dazu wird im Folgenden die Prädiktion eines ARX-Modells für verschiedene zukünftige Zeitpunkte betrachtet. Ausgangspunkt stellt die hier erneut angegebene Prädiktionsgleichung (2.10) dar:

$$\hat{y}(k|k-1) = - \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k). \quad (4.6a)$$

Analog dazu kann die Prädiktion im nächsten Abtastschritt angegeben werden:

$$\hat{y}(k+1|k) = - \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i+1) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i+1) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k+1). \quad (4.6b)$$

In dieser Gleichung kann die Summation des AR-Anteils zu

$$\hat{y}(k+1|k) = -a_1 y(k|k-1) - \sum_{i=2}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i+1) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i+1) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k+1) \quad (4.6c)$$

aufgeteilt werden. Der so separat angegebene Term wird nun durch die Prädiktion aus dem vorherigen Abtastschritt ersetzt, um eine Prädiktion für zwei Schritte in die Zukunft durchzuführen:

$$\hat{y}(k+1|k-1) = -a_1 \hat{y}(k|k-1) - \sum_{i=2}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i+1) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i+1) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k+1). \quad (4.6d)$$

Durch Einsetzen der Prädiktionsgleichung (4.6a) ergibt sich hieraus die Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k-1) = & -a_1 \left(- \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k) \right) \\ & - \sum_{i=2}^{n_{\text{ARX}}} a_i y(k-i+1) + \sum_{i=1}^{n_{\text{ARX}}} \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}(k-i+1) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k+1), \end{aligned} \quad (4.6e)$$

welche nach Ausschreiben der Summen

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k-1) = & -a_1 \left(-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{n_{\text{ARX}}-1} y(k-n_{\text{ARX}}+1) \right. \\ & \left. - a_{n_{\text{ARX}}} y(k-n_{\text{ARX}}) + \mathbf{b}_{n_{\text{ARX}}}^T \mathbf{u}(k-n_{\text{ARX}}) + \dots + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k) \right) \\ & - a_2 y(k-1) - \dots - a_{n_{\text{ARX}}} y(k-n_{\text{ARX}}+1) + \mathbf{b}_{n_{\text{ARX}}}^T \mathbf{u}(k-n_{\text{ARX}}+1) \\ & + \dots + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k+1) \end{aligned} \quad (4.6f)$$

lautet. Dies lässt sich zu

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k-1) = & (a_1^2 - a_2) y(k-1) + (a_1 a_2 - a_3) y(k-2) + \dots \\ & + (a_1 a_{n_{\text{ARX}}-1} - a_{n_{\text{ARX}}}) y(k-n_{\text{ARX}}+1) + (a_1 a_{n_{\text{ARX}}}) y(k-n_{\text{ARX}}) \\ & - a_1 \mathbf{b}_{n_{\text{ARX}}}^T \mathbf{u}(k-n_{\text{ARX}}) + (\mathbf{b}_{n_{\text{ARX}}}^T - a_1 \mathbf{b}_{n_{\text{ARX}}-1}^T) \mathbf{u}(k-n_{\text{ARX}}+1) \\ & + (-a_1 \mathbf{b}_0^T + \mathbf{b}_1^T) \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}(k+1) \end{aligned} \quad (4.6g)$$

zusammenfassen und nach den Signalen gruppieren.

Allgemein kann die Prädiktion eines ARX-Modells für N -Schritte mittels

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+N|k-1) &= f_{a,1}(a_1, \dots, a_{n_{\text{ARX}}})y(k-1) \\ &+ f_{a,2}(a_1, \dots, a_{n_{\text{ARX}}})y(k-2) \\ &+ \dots \\ &+ f_{a,n_{\text{ARX}}}(a_1, \dots, a_{n_{\text{ARX}}})y(k-n_{\text{ARX}}) \\ &+ \sum_{j=-n_{\text{ARX}}}^N \mathbf{f}_{b,j}(a_1, \dots, a_{n_{\text{ARX}}}, \mathbf{b})\mathbf{u}(k+j).\end{aligned}\quad (4.6h)$$

angegeben werden. Somit sind zur Prädiktion für N Abtastschritte die n_{ARX} Anfangswerte des Ausgangssignals y sowie alle $N + n_{\text{ARX}} + 1$ Werte der Eingangssignale \mathbf{u} notwendig.

Dies wird alternativ anhand eines MISO-Zustandsraummodells deutlich. Ebenfalls durch rekursives Einsetzen, nun von Gleichung (2.12), ergibt sich die Prädiktion des Ausgangssignals

$$y(k+N) = \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^N \mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{N-1-i} \mathbf{H} \mathbf{u}(k+i) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k+N) \quad (4.7)$$

in Abhängigkeit des Anfangszustands $\mathbf{x}(k)$ mit n Elementen und der Folge an Eingangssignalen. Für MISO-Systeme entspricht die Dimension n des Zustandsvektors genau der unbekannt Systemordnung n_{ARX} des ARX-Modells.

Mit diesem Wissen werden nun erneut die Matrizen \mathbf{Z} bzw. \mathbf{Z}^* betrachtet. Da gemäß der Voraussetzungen zur Identifikation eine genügende Anregung der Eingänge vorliegt, sind die Spalten der Eingangssignale in den Matrizen linear unabhängig. Die Spalten des Ausgangssignals hängen jedoch gemäß Gleichung (4.6h) bzw. (4.7) voneinander und den Eingängen ab. Damit ergibt sich der Spaltenrang der Matrizen gemäß

$$\text{srang}(\mathbf{Z}^*) = n_{\text{ARX}} + p \cdot n_u, \quad (4.8a)$$

$$\text{srang}(\mathbf{Z}) = n_{\text{ARX}} + p \cdot n_u + n_u. \quad (4.8b)$$

Ein Vergleich dieses Spaltenrangs (4.8) mit der Anzahl an Spalten gemäß Gleichung (4.5) verdeutlicht, dass die Matrix für $p > n_{\text{ARX}}$ nicht den vollen Spaltenrang aufweist.

Somit besteht für MISO-Systeme ohne Unsicherheit die Möglichkeit, die Systemordnung durch Untersuchung des Spaltenrangs von \mathbf{Z} bzw. \mathbf{Z}^* festzustellen, sofern diese Matrix mit $p > n_{\text{ARX}}$ Blockspalten aufgebaut wurde. Im Folgenden wird zur

Vereinfachung der Notation stets der allgemeinere Fall von Systemen mit Durchgriff betrachtet. Die getroffenen Aussagen gelten jedoch ebenso für Systeme ohne Durchgriff, wenn statt der Datenmatrix \mathbf{Z} die Matrix \mathbf{Z}^* verwendet wird.

4.1.3 Beispiel eines MISO-Systems ohne Unsicherheit

In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise zur Ordnungsbestimmung eines MISO-Systems anhand eines Beispiels verdeutlicht. Betrachtet wird ein System dritter Ordnung mit zwei Eingängen, wobei zunächst kein Durchgriff vorhanden ist. Das System liegt als ARX-Modell entsprechend Gleichung (2.10) vor, wobei die Parameter durch

$$a_1 = -1 \qquad a_2 = -1 \qquad a_3 = -1 \qquad (4.9a)$$

$$\mathbf{b}_1 = (0,1 \quad -0,1) \qquad \mathbf{b}_2 = (-0,1 \quad 0,2) \qquad \mathbf{b}_3 = (0,3 \quad -0,1) \qquad (4.9b)$$

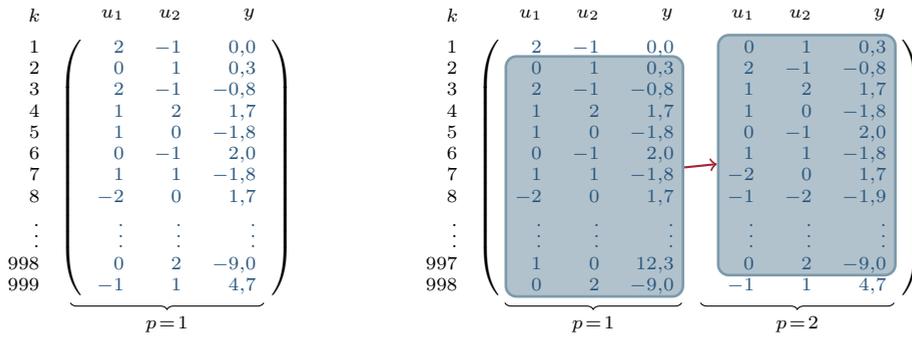
gegeben sind. Im Zustandsraum (2.12) kann dieses System in BNF durch

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4.10)$$

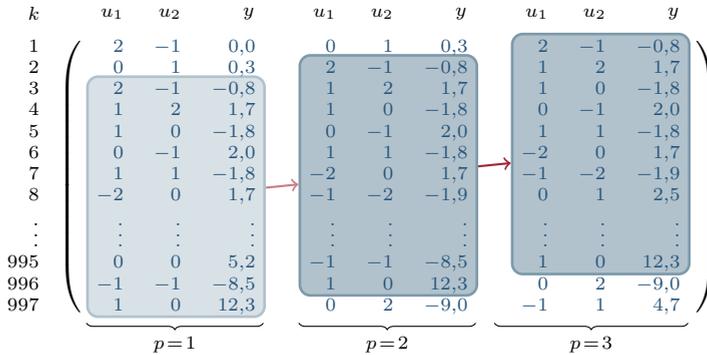
ebenfalls beschrieben werden.

Um die Daten zur Ordnungsbestimmung zu erzeugen wird das System für 1000 Abtastpunkte simuliert. Dies entspricht im Bereich der Systemidentifikation einer realistischen Datensatzlänge. Zur Erzeugung der Eingangssignale wird für beide Systemeingänge zunächst eine Folge normalverteilter Werte mit Varianz $\sigma^2 = 1$ erzeugt, um eine ausreichende Anregung aller Frequenzen mittels (pseudo) WGR sicherzustellen. Diese Signale werden in diesem Beispiel anschließend zur besseren Verdeutlichung auf ganze Zahlen gerundet, bevor sie als Eingangssignale zur Simulation des Systems eingesetzt werden. In Anhang D.1 sind die Einstellungen der Simulation für dieses MISO-System nochmals zusammengefasst.

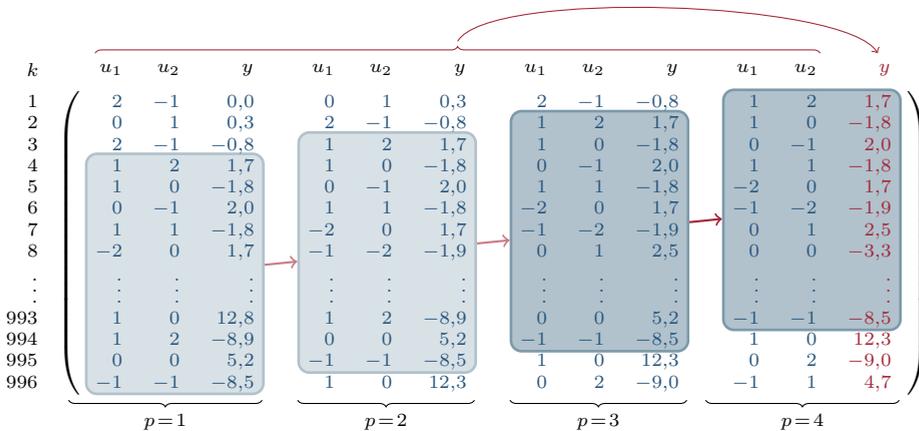
Die Vorgehensweise zum Aufbau der Matrix \mathbf{Z}^* wird in Abbildung 4.1 verdeutlicht, wobei nur die ersten acht Zeilen und die letzten zwei bis vier Zeilen der Matrix dargestellt sind. Dabei ist in Bild 4.1(a) der Aufbau für die erste Blockspalte dargestellt. Im System ist kein Durchgriff vorhanden, weshalb lediglich drei Spalten bestehend aus den Signalverläufen der beiden Eingänge u_1 und u_2 sowie des Ausgangs y vorkommen. Die Datenpunkte sind dabei in blauer Schrift hervorgehoben. Der Spaltenrang der Matrix ist drei und entspricht somit der Spaltenzahl. Im zweiten Bild 4.1(b) ist die Situation $p = 2$ durch Hinzufügen einer Blockspalte dargestellt.



(a) Matrix Z^* für $p = 1$ Blockspalte (b) Matrix Z^* für $p = 2$ Blockspalten



(c) Matrix Z^* für $p = 3$ Blockspalten



(d) Matrix Z^* für $p = 4$ Blockspalten

Abbildung 4.1: MISO-Beispiel ohne Unsicherheit

Durch die farbliche Hervorhebung wird die Verschiebung aller Signale in der zweiten Blockspalte um einen Abtastschritt hervorgehoben. Auch in diesem Fall besitzt die Matrix \mathbf{Z}^* den vollen Spaltenrang von sechs. Für Bild 4.1(c) wurde eine weitere Blockspalte zu $p = 3$ hinzugefügt, was zu einer Matrix mit vollem Spaltenrang von neun führt. In Bild 4.1(d) ist die Matrix \mathbf{Z}^* schließlich mit $p = 4$ Blockspalten dargestellt. Wie in den vorherigen Bildern ist die Verschiebung der Signalverläufe farblich hervorgehoben. In diesem Fall beträgt der Spaltenrang elf, da die letzte Ausgangsspalte als Linearkombination der sonstigen Spalten ausgedrückt werden kann. Bei der Ordnungsbestimmung wird diese Tatsache ausgenutzt, da durch Hinzufügen der vierten Blockspalte ein Rangabfall auftritt und die Ordnung somit zu $n_{\text{ARX}} = 3$ erkannt wird.

Wenn für das System zusätzlich ein Durchgriff berücksichtigt werden soll, muss die Datenmatrix \mathbf{Z}^* in diesem Beispiel um zwei Spalten der Eingänge erweitert werden. Diese Spalten werden wie in den Bildern 4.1(b) bis 4.1(d) nochmals um einen Abtastschritt verschoben. Der Spaltenrang erhöht sich dabei wie auch die Spaltenzahl um zwei und hat somit hier keine Auswirkung auf die Ordnungsbestimmung. Wenn kein Vorwissen über einen Durchgriff im System vorliegt, sollte stets von Systemen mit Durchgriff ausgegangen werden. In Abschnitt 4.2.3 wird dies anhand eines Beispiels mit Unsicherheit nochmals verdeutlicht.

4.2 Ordnungsbestimmung für unsichere Systeme mit einer Ausgangsgröße

Im Folgenden wird die soeben beschriebene Vorgehensweise für den Fall von Messdaten mit beschränkter Unsicherheit erweitert. Dabei wird für die Messdaten eine Unsicherheitsbeschreibung durch Intervalle genutzt, welche zu Beginn von Kapitel 3 beschrieben ist. Neben einer Beschreibung der Vorgehensweise zur Ordnungsbestimmung werden die Grenzen des Verfahrens und die daraus resultierenden Anforderungen an die Messdaten betrachtet und das Verfahren an einem Beispiel demonstriert.

4.2.1 Vorgehensweise für Intervall-Messdaten

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Systemordnung, die im vorherigen Abschnitt 4.1 beschrieben wurde, kann grundsätzlich auch bei Intervall-Messdaten durch eine Untersuchung des Spaltenrangs der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ erfolgen. Die Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ wird dabei ebenfalls entsprechend Gleichung (4.4) aufgebaut, indem die

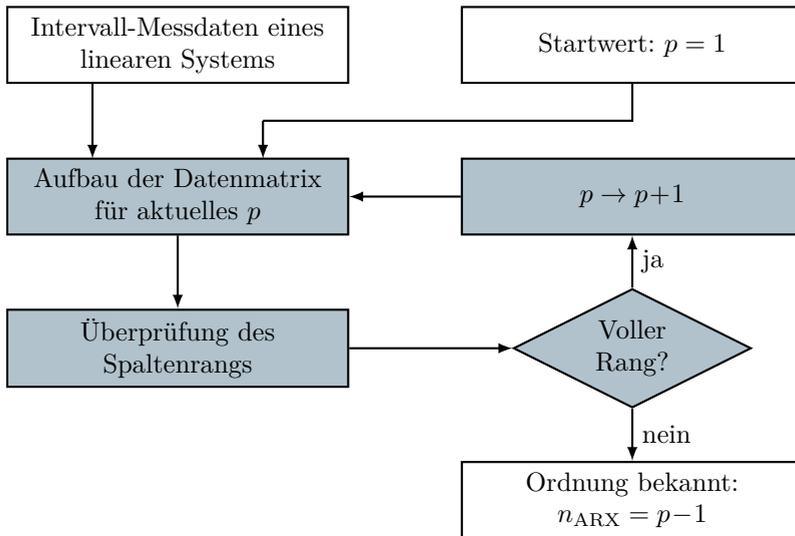


Abbildung 4.2: Ablauf der Ordnungsbestimmung im MISO-Fall

Intervall-Messdaten $[\mathbf{u}]$ und $[\mathbf{y}]$ genutzt werden. Diese Intervalle enthalten gemäß den Gleichungen (3.1) bis (3.3) auch die ungestörten, wahren (aber nicht bekannten) Werte des Systems. Entsprechend der Definition des Rangs von Intervallmatrizen in Gleichung (2.30) ist damit sichergestellt, dass der Spaltenrang von $[\mathbf{Z}]$ nicht größer als der Spaltenrang von \mathbf{Z} sein kann, da diese Matrix in $[\mathbf{Z}]$ enthalten ist. Mögliche Ursachen für eine Verringerung des Spaltenrangs von $[\mathbf{Z}]$ gegenüber \mathbf{Z} werden im folgenden Abschnitt 4.2.2 vorgestellt und müssen vermieden werden. Damit entspricht der Spaltenrang von $[\mathbf{Z}]$ genau dem Spaltenrang \mathbf{Z} für das ungestörte System und kann somit zur Ordnungsbestimmung genutzt werden.

Da der Rang einer Intervallmatrix nicht direkt bestimmt werden kann (vgl. Abschnitt 2.2.2), wird eine iterative Vorgehensweise basierend auf den Kriterien zur Überprüfung auf vollen Spaltenrang benötigt. Zu Beginn wird die Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ mit $p = 2$ Blockspalten aufgebaut und mit den in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Kriterien auf vollen Spaltenrang überprüft. Diese Rangüberprüfung kann mit sehr geringem Rechenaufwand durchgeführt werden. Falls $[\mathbf{Z}]$ nicht vollen Spaltenrang hat (aber alle Voraussetzungen erfüllt sind), hat das System die Ordnung $n_{\text{ARX}} = 1$.

Falls jedoch eine Matrix mit vollem Spaltenrang vorliegt, wird die Anzahl der Blockspalten p erhöht und eine neue Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ mit $p \rightarrow p+1$ aufgebaut. Damit startet ein neuer Durchlauf des Verfahrens, welches als Abbruchkriterium

einen Rangabfall in $[\mathbf{Z}]$ oder eine vom Anwender vorgegebene Schranke nutzt. Sobald die Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ nicht mehr den vollen Spaltenrang hat, ist die Ordnung des Systems mit $n_{\text{ARX}} = p - 1$ bekannt.

Für Systeme mit Durchgriff ist ein Start des Algorithmus mit $p = 1$ Blockspalte sinnvoll. Wenn die Datenmatrix mit diesem Startwert bereits keinen vollen Spaltenrang hat, liegt ein statisches System (Modellordnung null) vor, das nur durch den Durchgriff beschrieben wird. Für Systeme ohne Durchgriff hat dieser Startwert, außer einer zusätzlichen Ranguntersuchung, keine Nachteile. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 4.2 grafisch dargestellt.

4.2.2 Grenzen der Ordnungsbestimmung

Bei der Ordnungsbestimmung basierend auf Intervall-Messdaten wird gefordert, dass der Spaltenrang der Intervall-Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ dem Spaltenrang der unbekanntenen, wahren Datenmatrix \mathbf{Z} entspricht. Wenn jedoch in der Intervall-Datenmatrix Spalten vorkommen, welche in allen Zeilen überlappende Intervalle beinhalten, enthalten diese Intervall-Spalten linear abhängige reellwertige Spalten. Diese in Teilen der Intervall-Spalten enthaltene lineare Abhängigkeit führt entsprechend der Rangdefinition (2.30) zu einem Rangabfall der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$, welcher nicht durch die Ordnung des Systems bedingt ist.

Es gibt zwei mögliche Ursachen, die zu überlappenden Intervallen und somit zu einer unerwünschten Verringerung des Spaltenrangs der Intervall-Datenmatrix führen können:

1. Die erste Möglichkeit basiert direkt auf der Breite der Intervalle aller Messdaten und somit auf der Messunsicherheit. Da die Spalten in $[\mathbf{Z}]$ direkt den (zeitlich verschobenen) Signalverläufen der Ein- und Ausgangssignale entsprechen, beeinflusst deren Unsicherheit direkt den Intervallradius in den Spalten der Datenmatrix. Wenn nun für zwei oder mehr Signale die Unsicherheit derart groß ist, dass die Intervalle für alle Abtastpunkte überlappen, führt dies zu dem unerwünschten Rangabfall. Dabei kann diese Überlappung sowohl zwischen verschiedenen Eingangssignalen als auch zwischen Eingangssignalen und dem Ausgangssignal auftreten. Abbildung 4.3 verdeutlicht diese Problematik anhand zweier Eingangssignale. Dabei ist die Überlappung als grüne Fläche dargestellt. In Bild 4.3(b) besteht diese Überlappung im Gegensatz zu Bild 4.3(a) für alle betrachteten Abtastpunkte, sodass mindestens ein reellwertiges Signal in beiden Signalverläufen enthalten ist und somit eine lineare Abhängigkeit besteht. Um diese Ursache für einen Rangabfall in $[\mathbf{Z}]$ zu vermeiden, müssen ausreichend genaue Aktoren bzw. Sensoren eingesetzt werden. Zudem muss die Intervall-

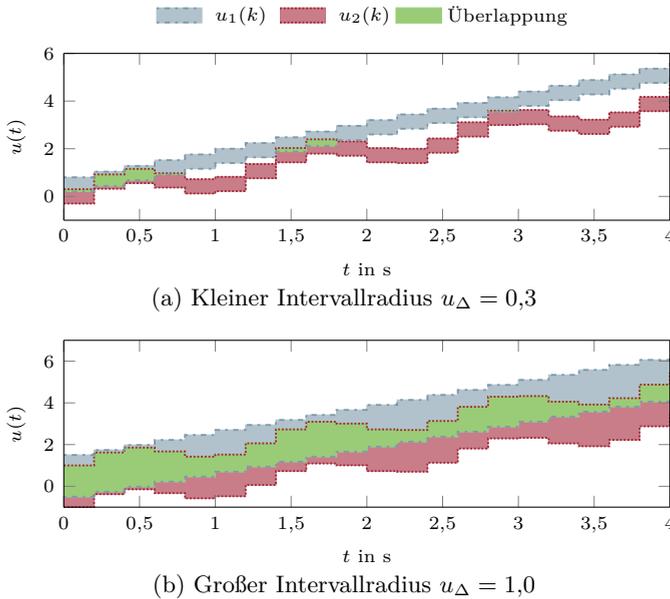


Abbildung 4.3: Auswirkung verschiedener Intervallradien

unsicherheit passend zur tatsächlich vorhandenen Unsicherheit gewählt sein. Dabei ist zu beachten, dass eine zu geringe Intervallbreite die Voraussetzung des sicheren Einschusses verletzt, eine zu groß gewählte Unsicherheit dagegen die Ordnungsbestimmung durch den unbeabsichtigten Rangabfall verfälscht.

- Die zweite mögliche Ursache für eine unerwünschte Verringerung des Spaltenrangs von $[\mathbf{Z}]$ wird durch eine zu kleine Abtastzeit T_a hervorgerufen. Beim Aufbau von $[\mathbf{Z}]$ werden die einzelnen Ein- und Ausgangssignale für jede Blockspalte um jeweils einen Abtastschritt verschoben. Wenn jedoch diese Verschiebung des Signalverlaufs in Relation zur Dynamik des Signals gering ist, kann es vorkommen, dass die Änderung des Signals zwischen den aufeinanderfolgenden Messwerten gering ist. Die Intervallmessdaten überlappen sich somit zwischen aufeinanderfolgenden Werten. Sofern dies für alle gemessenen Abtastpunkte der Fall ist, beinhalten die verschobenen Spalten reellwertige Spalten mit linearer Abhängigkeit, was zum unerwünschten Rangabfall führt. In Abbildung 4.4 wird dieser Effekt verdeutlicht. In Bild 4.4(a) wurde ein sinusförmiges Signal mit einer Abtastzeit von $T_a = 1$ s abgetastet. Die in grün dargestellte Überlappung zwischen den um einen Abtastschritt verschobenen Signalen besteht lediglich zu einzelnen Abtastpunkten. In Bild 4.4(b) dagegen wurde eine deutlich kleinere Abtastzeit von $T_a = 0,25$ s bei identischer Intervallbreite gewählt, was zu jedem Abtastpunkt zu einer Überlappung führt und somit

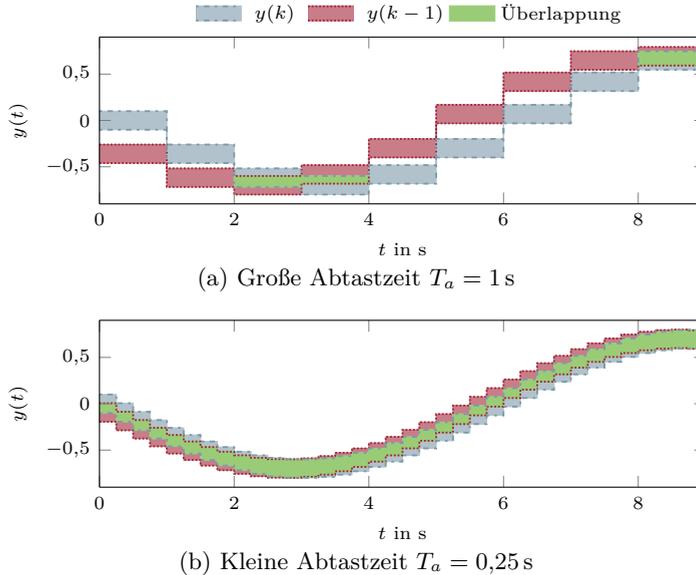


Abbildung 4.4: Auswirkung verschiedener Abtastzeiten

einen unerwünschten Rangabfall in der Datenmatrix auslöst. Zur Vermeidung dieses Effekts muss die Abtastzeit entsprechend der Dynamik des Systems gewählt werden, wobei das *Nyquist-Shannon-Abtasttheorem* eingehalten werden muss. Bei den Eingangssignalen ist durch genügende Anregung sicherzustellen, dass ausreichend Änderungen der Signale vorhanden sind. Zur Realisierung der genügenden Anregung können dabei die zur Identifikation gebräuchlichen Eingangssignale wie z. B. weißes Rauschen genutzt werden.

Sofern beide Ursachen vermieden werden und eine genügende Anregung der Systemeingänge besteht, entspricht der Spaltenrang der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ genau dem Spaltenrang der unbekannt, ungestörten Matrix \mathbf{Z} . Die Ordnungsbestimmung ist damit wie im vorherigen Abschnitt beschrieben möglich. Sollte trotz sorgfältiger Prüfung eine der Voraussetzungen nicht erfüllt sein, wird dies in der Regel an den Resultaten der Parameteridentifikation erkennbar, da dann eine zu geringe Modellordnung erkannt wird und dazu keine passenden Modellparameter gefunden werden.

4.2.3 Beispiel des MISO-Systems mit beschränkter Unsicherheit

Im Folgenden wird das Beispiel aus Abschnitt 4.1.3 erneut aufgegriffen, wobei jetzt anstatt der bisher betrachteten reellwertigen Daten eine beschränkte Unsicherheit berücksichtigt wird. Ausgangspunkt stellen die simulierten, gerundeten Eingangs- und Ausgangssignalverläufe des Systems mit den Parametern (4.9) dar. Die Eingangssignale, welche wie in Abschnitt 4.1.3 beschrieben durch weißes Rauschen gebildet werden, weisen dabei bei dieser Simulation eine maximale Amplitude von 3 bzw. 3,5 auf. Für das Ausgangssignal beträgt die simulierte Amplitude 15,9. Um gemessene Daten \mathbf{u}_{mess} bzw. y_{mess} nachzubilden werden die simulierten Eingangs- und Ausgangsdaten durch einen gleichverteilten Fehler mit $u_{\Delta} = 0,035$ bzw. $y_{\Delta} = 0,159$ überlagert, was einer Messgenauigkeit von 1% der jeweiligen maximalen Signalamplitude entspricht. Diese Unsicherheit wird entsprechend zum Einschluss der Messdaten in Intervalle $[u_i(k)] = [u_{i,\text{mess}}(k) - u_{\Delta} \quad u_{i,\text{mess}}(k) + u_{\Delta}]$, $i = 1, 2$ bzw. $[y(k)] = [y_{\text{mess}}(k) - y_{\Delta} \quad y_{\text{mess}}(k) + y_{\Delta}]$ genutzt. Durch diese Vorgehensweise werden Intervalldaten erzeugt, welche gemäß der Voraussetzungen zur Identifikation, den ungestörten wahren Wert der Eingangs- und Ausgangsgrößen enthalten. Diese Daten stellen eine Nachbildung gemessener Werte von einem Messgerät dar, welches eine Unsicherheit von konstant 1% bezogen auf seinen Messbereichsendwert aufweist.

Wenn diese Intervalldaten zur Ordnungsbestimmung genutzt werden, wird vom Verfahren für $p = 1$ bis $p = 3$ Blockspalten kein Rangabfall der Matrix $[\mathbf{Z}^*]$ festgestellt, jedoch für $p = 4$ Blockspalten. Damit wird die Systemordnung $n_{\text{ARX}} = 3$ des ARX-Modells korrekt erkannt. Wenn kein Wissen über einen Durchgriff vorhanden ist, wird anstatt der Matrix $[\mathbf{Z}^*]$ die Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ verwendet. Da jedoch lediglich eine weitere Blockspalte bestehend aus zwei linear unabhängigen Eingangssignalen enthalten ist, liefert die Ordnungsbestimmung auch in diesem Fall die korrekte Systemordnung $n_{\text{ARX}} = 3$.

Wird dem System ein Durchgriff von

$$\mathbf{b}_0 = (0,50 \quad 1) \tag{4.11}$$

hinzugefügt, ist auch hierfür die Ordnungsbestimmung erfolgreich. Selbst wenn fälschlicherweise angenommen wird, dass kein Durchgriff vorliegt, liefert die Ordnungsbestimmung in diesem Beispiel die korrekte Systemordnung. Ursache dafür ist, dass die Datenmatrix $[\mathbf{Z}^*]$ für $p = 4$ Blockspalten nicht den vollen Spaltenrang aufweist und somit schon der Anteil des Systems ohne Durchgriff zu einem Rangabfall führt. Ein Hinzufügen der Eingangsspalten des Durchgriffs ändert hieran nichts. Dies stellt jedoch einen Sonderfall dar. Im Allgemeinen kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Ordnungsbestimmung trotz ignoriertem Durchgriff erfolgreich ist.

Das Beispiel wird im Abschnitt 5.1.3 zur Parameteridentifikation erneut betrachtet. Dabei wird ersichtlich, dass die falsche Annahme eines Systems ohne Durchgriff in diesem Beispiel Probleme verursacht und somit erkennbar ist, da das Modell ohne Durchgriff nicht durch die Daten erklärt werden kann.

4.3 Erweiterung für unsichere Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen

Nachdem in den vorherigen Abschnitten ein Verfahren zur Ordnungsbestimmung für Systeme mit einer Ausgangsgröße vorgestellt wurde, wird im Folgenden eine Erweiterung für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen beschrieben. Dabei wird zunächst untersucht, wie eine direkte Erweiterung der Vorgehensweise möglich ist und welche Schwierigkeiten dabei auftreten können. Anschließend wird eine Vorgehensweise zur Bestimmung eines Modells mit minimaler Systemordnung präsentiert. Eine Möglichkeit, wie diese Vorgehensweise weiter optimiert werden kann, um den Rechenaufwand zu reduzieren, wird ebenfalls angegeben. Anhand verschiedener Beispiele werden die Ansätze mit ihren Eigenschaften verdeutlicht. Da für MIMO-Systeme weder ARX- noch Zustandsraummodelle eindeutig sind, können die beschriebenen Verfahren jeweils unterschiedliche Modellordnungen bestimmen.

4.3.1 Ansätze zur direkten Erweiterung

Der intuitive Ansatz zur Ordnungsbestimmung von MIMO-Systemen basierend auf Messdaten mit Intervallunsicherheit nutzt direkt die vektorielle Ausgangsgröße zum Aufbau der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ entsprechend Gleichung (4.3) und (4.4). Diese Vorgehensweise führt jedoch zu Problemen, da die Datenmatrix nur in Ausnahmefällen bei Aufbau mit der korrekten Blockspaltenzahl $p = n_{\text{ARX}}$ vollen Spaltenrang hat. Die wesentliche Ursache dafür ist direkt in der Modellgleichung des ARX-Modells (2.11) erkennbar. Durch die Parametermatrizen \mathbf{A}_i besteht eine Kopplung zwischen den verschiedenen Ausgangsgrößen, was zu einer linearen Abhängigkeit der zugehörigen Ausgangsspalten in $[\mathbf{Z}]$ führt. Selbst bei komplett entkoppelten Ausgängen kann es zu einem Rangabfall von $[\mathbf{Z}]$ kommen, sofern die Dynamiken der entkoppelten Ausgänge eine unterschiedliche individuelle Ordnung aufweisen. Da bei dieser naiven Vorgehensweise für alle Ausgänge dieselbe Anzahl an Spalten in $[\mathbf{Z}]$ enthalten ist, verursachen die Ausgänge mit geringerer Ordnung einen Rangabfall. Somit werden aufwendigere Vorgehensweisen benötigt, um eine Modellordnung für MIMO-Systeme zu finden.

Ein nur wenig komplexerer Ansatz basiert auf einer Aneinanderreihung individueller MISO-Modelle. Dazu wird zunächst für jeden Ausgang individuell ein ARX-Modell mit der Vorgehensweise aus Abschnitt 4.2.1 identifiziert, wobei eine Parameteridentifikation entsprechend Kapitel 5 durchgeführt wird. Die Ordnung des MIMO-ARX-Modells wird entsprechend der höchsten Ordnung aller individuellen MISO-Modelle gewählt. Das MIMO-ARX-Modell entsteht dann durch die Aneinanderreihung

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i,n_y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{i,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{i,n_y}^T \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

der individuellen Modelle. Bei dieser Vorgehensweise wird keinerlei Kopplung zwischen den Ausgängen berücksichtigt, da alle \mathbf{A}_i lediglich Elemente auf der Hauptdiagonalen aufweisen. Es handelt sich somit im Allgemeinen nicht um eine Minimalrealisierung des Systems. Soll anstatt eines ARX-Modells ein Zustandsraummodell bestimmt werden, kann dies durch die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene Transformation erreicht werden. Alternativ können direkt die einzelnen MISO-ARX-Modelle in den Zustandsraum transformiert, und diese Modelle dort zu einem Gesamtmodell durch Aneinanderreihen zusammengefügt werden. Diese Vorgehensweise zur Ordnungsbestimmung liefert keine Information über die minimale Ordnung eines Zustandsraummodells für das betrachtete System.

Darauf aufbauend besteht die Möglichkeit, die Ordnungsbestimmung mit der Berücksichtigung von Kopplungen zwischen den Ausgängen zu kombinieren, um die Ordnung einer Minimalrealisierung im Zustandsraum zu ermitteln. Auch dieses Verfahren basiert direkt auf der Ordnungsbestimmung für MISO-Systeme aus Abschnitt 4.2.1. Im ersten Schritt des Verfahrens wird für jeden Ausgang y_i die Ordnung eines MISO-Modells n_i bestimmt. Diese Ordnung entspricht der größten Verzögerung eines Signals, welches zur Beschreibung des Signalverlaufs des betrachteten Ausgangs durch ein unabhängiges ARX-Modell erforderlich ist. Im zweiten Schritt wird die Ordnung des MIMO-ARX-Modells entsprechend der höchsten Verzögerung der einzelnen Ausgänge $n_{\text{ARX}} = \max_i n_i$ gewählt.

Die minimale Ordnung eines Zustandsraummodells für dieses System ist in diesem Schritt noch unbekannt. Für den Ausgang y_h mit der höchsten individuellen Ordnung wird anschließend im dritten Schritt die Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}] = [\mathbf{Z}]$ aufgebaut. Falls mehrere Ausgänge dieselbe individuelle Ordnung y_h aufweisen kann ein beliebiger Ausgang gewählt werden. Für alle weiteren Ausgänge $i = 1 \dots n_y$, $i \neq h$ wird jeweils

eine andere Datenmatrix

$$[\mathbf{W}_i] = \begin{pmatrix} [y_i(n_{\text{ARX}} - n_i + 1)] & \dots & [y_i(n_{\text{ARX}})] \\ [y_i(n_{\text{ARX}} - n_i + 2)] & \dots & [y_i(n_{\text{ARX}} + 1)] \\ \vdots & & \vdots \\ [y_i(N - n_i)] & \dots & [y_i(N - 1)] \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

die lediglich aus den zeitlich verschobenen Ausgangsspalten bis zur individuellen MISO-Ordnung des Ausgangs besteht, aufgebaut. Dies erfolgt in Form einer Matrix mit passender Zeilenzahl zur Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ für die Ordnung n_{ARX} . Dadurch bleiben die ältesten $n_{\text{ARX}} - n_i$ Datenpunkte unberücksichtigt, da für diesen Ausgang keine entsprechende Verschiebung notwendig ist.

Mit diesen Datenmatrizen $[\mathbf{W}_i]$ wird eine iterative Vorgehensweise zur Bestimmung der Kopplungen von y_h zu y_i durchgeführt. Dabei wird in jedem Iterationsschritt die Matrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ um eine Spalte aus einer der Matrizen $[\mathbf{W}_i]$ erweitert. Die erweiterte Matrix

$$[\hat{\mathbf{Z}}] = \left([\tilde{\mathbf{Z}}] \quad [\mathbf{w}_{i,j}] \right) \quad (4.14)$$

wird wie bei der MISO-Ordnungsbestimmung auf vollen Spaltenrang untersucht. Durch diese Ranguntersuchung kann festgestellt werden, ob die aktuell betrachtete Spalte $[\mathbf{w}_{i,j}]$ weitere Information zur bestehenden Datenmatrix beiträgt, oder ob diese als Linearkombination der bereits in $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ vorhandenen Eingangs- und Ausgangsspalten dargestellt werden kann. Wenn also die erweiterte Matrix durch Hinzufügen der Spalte nicht mehr den vollen Spaltenrang hat, kann diese Spalte durch die vorhandenen Spalten beschrieben werden. Diese Abhängigkeit beruht auf einer Kopplung zwischen den in der Matrix enthaltenen Ausgängen. Ein Rangabfall durch Abhängigkeit der Ausgangsspalte von den ebenfalls vorhandenen Eingangsspalten ist nicht möglich, da dies durch die vorherige MISO-Ordnungsbestimmung und den entsprechenden Aufbau der Matrix $[\mathbf{W}_i]$ bereits berücksichtigt ist. Die Spalte wird daher wieder aus der erweiterten Matrix entfernt, sodass $[\hat{\mathbf{Z}}] = [\tilde{\mathbf{Z}}]$ wird.

Die nächste Iteration beginnt durch Erweiterung mit einer anderen Spalte aus $[\mathbf{W}_i]$ nach Gleichung (4.14). Falls das Hinzufügen der Spalte $[\mathbf{w}_{i,j}]$ nicht zu einem Abfall des Spaltenrangs führt, besteht für diesen Ausgang in der betrachteten zeitlichen Verschiebung keine Kopplung und die Spalte verbleibt in der Datenmatrix $[\hat{\mathbf{Z}}] = [\tilde{\mathbf{Z}}]$, welche die Basis für die nächste Iteration bildet.

Das Verfahren ist abgeschlossen, wenn für alle Ausgänge $i = 1 \dots n_y$, $i \neq h$ jeweils alle Spalten aus $[\mathbf{W}_i]$ betrachtet wurden. Die Anzahl der Spalten, die zur initialen Datenmatrix hinzugefügt wurden, ohne eine Verringerung des Spaltenrangs zu

verursachen, wird mit α bezeichnet, wobei

$$0 \leq \alpha \leq \sum_{i \neq h} n_i, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0 \quad (4.15)$$

gilt. In Abbildung 4.5 wird die Vorgehensweise anhand eines Ablaufdiagramms nochmals kompakt zusammengefasst. Das Ergebnis des Verfahrens ist eine Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ mit vollem Spaltenrang und

$$c_{\tilde{\mathbf{Z}}^*} = (n_u + 1)n_{\text{ARX}} + \alpha \quad \text{bzw.} \quad (4.16a)$$

$$c_{\tilde{\mathbf{Z}}} = (n_u + 1)n_{\text{ARX}} + n_u + \alpha \quad (4.16b)$$

Spalten. Diese Matrix kann, wie in Abschnitt 5.1.2 beschrieben, zur Parameteridentifikation genutzt werden. Durch dieses Verfahren wird außerdem die Ordnung einer Minimalrealisierung im Zustandsraum bestimmt, welche

$$n_{\text{ZRD}} = n_{\text{ARX}} + \alpha \quad (4.17)$$

entspricht. Ein Nachteil der Vorgehensweise ist jedoch, dass Kopplungen zwischen den Ausgängen nicht vollständig berücksichtigt werden. Da die Ordnung des ARX-Modells anhand der MISO-Ordnung eines einzelnen Ausgangs bestimmt wird, entspricht dieser Schritt einer Vernachlässigung der durch Kopplung zwischen den Ausgängen möglichen Reduktion der Modellordnung. Die weiteren Ausgänge werden anschließend an diesen ersten Ausgang angekoppelt, ohne diesen zu beeinflussen. Im Allgemeinen führt dies zu einem ARX-Modell, welches eine höhere Ordnung als notwendig hat und daher keine Minimalrealisierung darstellt.

4.3.2 Beispiele zur direkten Erweiterung

In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise anhand zweier Beispiele demonstriert. Zunächst wird das MIMO-ARX-System

$$y_1(k) = \frac{8}{10}y_1(k-1) + u_1(k-1) - \frac{1}{2}u_2(k-1), \quad (4.18a)$$

$$y_2(k) = \frac{9}{10}y_1(k-1) - \frac{1}{2}y_2(k-1) + 2u_2(k-1) \quad (4.18b)$$

betrachtet. Es handelt sich um ein System erster Ordnung mit zwei Ausgängen und zwei Eingängen. Bei diesem System besteht eine Kopplung zwischen den Ausgängen, da der zweite Ausgang vom vorherigen Wert des ersten Ausgangs abhängt.

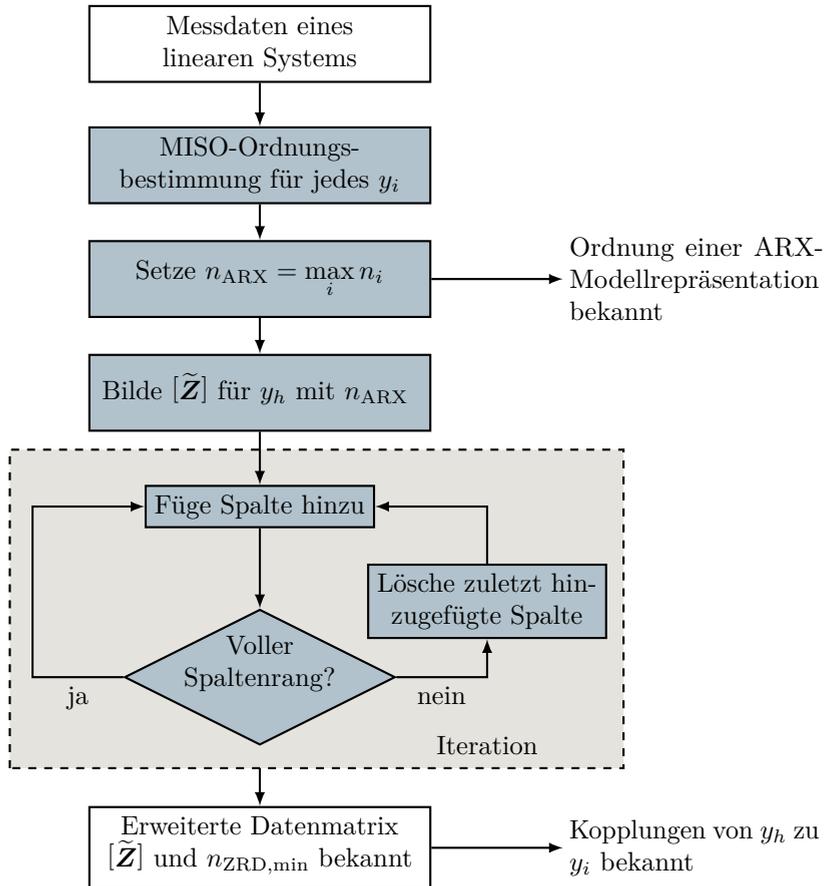


Abbildung 4.5: Ablauf der Ordnungsbestimmung im MIMO-Fall

Die Parametermatrizen dieses Systems entsprechend Gleichung (2.11) sind durch

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & 0 \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

gegeben, was einer alternativen Darstellung des Systems zu Gleichung (4.18) entspricht. Analog zum Beispiel in Abschnitt 4.1.3 und 4.2.3 wird das System für 1000 Abtastpunkte simuliert. Die so erzeugten Eingangsdaten haben eine maximale Amplitude von 3,6 bzw. 3,3. Die maximale Amplitude der Daten beider Ausgänge beträgt 6,5 bzw. 8,5. Die so erzeugten Daten werden durch einen gleichverteilten Fehler mit 1% der jeweiligen maximalen Signalamplitude überlagert um Messdaten nachzubilden. Diese maximale Unsicherheit wird als Intervallradien $u_{1,\Delta} = 0,036$, $u_{2,\Delta} = 0,033$, $y_{1,\Delta} = 0,065$ und $y_{2,\Delta} = 0,085$ genutzt, um die so erzeugte Nachbildung der Messdaten in Intervallen einzuschließen. Anhang D.1 fasst die Simulationseinstellungen für dieses erste MIMO-System kompakt zusammen.

Die MISO-Ordnungsbestimmung für jeden einzelnen Ausgang mit der Vorgehensweise aus Abschnitt 4.2.1 liefert für den ersten Ausgang die Ordnung $n_{y_1} = 1$, da die Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ für $p = 2$ Blockspalten keinen vollen Spaltenrang hat. Für den zweiten Ausgang wird das Ergebnis $n_{y_2} = 2$ bestimmt, da bei $p = 3$ Blockspalten ein Rangabfall auftritt und somit keine weitere Erhöhung der Blockspaltenzahl möglich ist. Ursache für die Ordnung des zweiten Ausganges ist, dass die Kopplung mit dem ersten Ausgang durch eine zusätzliche Signalverzögerung abgebildet wird. Die im vorherigen Abschnitt beschriebene grundlegende Ordnungsbestimmung liefert somit ein ARX-Modell zweiter Ordnung, welches durch ein entkoppeltes Modell erster Ordnung ergänzt wird. Im Zustandsraum ergibt sich daraus ein Modell dritter Ordnung.

Wenn darauf aufbauend die erweiterte Methode aus dem vorherigen Abschnitt genutzt wird, ergibt sich ein ARX-Modell zweiter Ordnung, da die soeben bestimmte Ordnung des zweiten Ausganges für das komplette Modell verwendet wird. Im Laufe des Verfahrens wird die Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ für den Ausgang y_2 wie im MISO-Fall aufgebaut. Für den Ausgang y_1 wird dagegen die Datenmatrix $[\mathbf{W}_1]$ aufgebaut, welche aufgrund der MISO-Ordnung dieses Ausganges lediglich aus einer Spalte besteht:

$$[\mathbf{W}_1] = \begin{pmatrix} [y_1(2)] \\ [y_1(3)] \\ \vdots \\ [y_1(999)] \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Diese Spalte wird dann zur Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ hinzugefügt, was in diesem Beispiel

zu keiner Matrix mit vollem Spaltenrang führt. Somit wird y_1 in Abhängigkeit des MISO-Modells zweiter Ordnung für y_2 ausgedrückt. Da keine Erweiterung der Datenmatrix $[\tilde{Z}]$ durchgeführt wurde, ist $\alpha = 0$ und die Ordnung einer Minimalrealisierung im Zustandsraum $n = 2$. Die Modellgleichungen (4.18) dieses Beispielsystems können alternativ als Modell zweiter Ordnung mit den Gleichungen

$$y_1(k) = \frac{16}{45}y_2(k-2) + \frac{8}{10}u_1(k-2) - \frac{82}{45}u_2(k-2) + \frac{32}{45}y_2(k-1) + u_1(k-1) - \frac{1}{2}u_2(k-1), \quad (4.21a)$$

$$y_2(k) = \frac{4}{10}y_2(k-2) + \frac{9}{10}u_1(k-2) - \frac{41}{20}u_2(k-2) + \frac{3}{10}y_2(k-1) + 2u_2(k-1) \quad (4.21b)$$

angegeben werden. Es handelt sich dabei um eine Beschreibung, bei welcher der erste Systemausgang keine eigene Dynamik besitzt und direkt von den Eingängen und vom zweiten Systemausgang abhängt, wie dies auch bei der Ordnungsbestimmung erkannt wurde. Dadurch wird ersichtlich, dass die Ordnungsbestimmung in diesem Fall eine korrekte Systemrepräsentation liefert. In Anhang C wird die Umformung der Modellgleichungen ausführlich hergeleitet.

Zur Verdeutlichung wird nun ein komplexeres Beispielsystem betrachtet. Es handelt sich dabei um ein ARX-Modell zweiter Ordnung mit zwei Ausgängen und drei Eingängen. In diesem System ist ein Durchgriff vorhanden. Die Parametermatrizen des Modells entsprechend Gleichung (2.11) sind durch

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix} \quad (4.22b)$$

gegeben. Für das zugehörige Zustandsraummodell (2.12) lauten die Parametermatrizen dieses Systems in erweiterter BNF:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 1 \\ -1 & -0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}. \quad (4.23b)$$

Auch dieses Beispielsystem wird für 1 000 Abtastpunkte mit jeweils einer Folge normalverteilter Werte (Varianz $\sigma^2 = 1$) für die drei Eingänge simuliert. Die maximale Amplitude dieser Eingangssignale beträgt 3,2, 3,4 bzw. 3,4. Diese Eingangsdaten führen zu Ausgangssignalen mit den maximalen Amplituden 6,6 am ersten Systemausgang und 12,0 am zweiten Ausgang. Die so erzeugten Daten werden mittels eines gleichverteilten Fehlers mit einer Amplitude von 1 % der jeweiligen maximalen Signalamplitude überlagert um eine Nachbildung von gemessenen Daten zu generieren. Diese Messdaten werden als Mittelpunkt der Intervalldaten genutzt, welche mit den Intervallradien $u_{1,\Delta} = 3,2 \times 10^{-3}$, $u_{2,\Delta} = 3,4 \times 10^{-3}$, $u_{3,\Delta} = 3,4 \times 10^{-3}$, $y_{1,\Delta} = 6,6 \times 10^{-3}$ bzw. $y_{2,\Delta} = 12,0 \times 10^{-3}$ gebildet werden und die die ungestörten Werte gemäß den Voraussetzungen zur Identifikation enthalten. Auch die Einstellungen dieses zweiten MIMO-Beispiels sind in Anhang D.1 nochmals dargestellt.

Die so erzeugten Intervalldaten werden zur Bestimmung der individuellen MISO-Modellordnung für jeden Ausgang genutzt, was für den ersten Ausgang die Ordnung $n_{y_1} = 2$ und für den zweiten Ausgang $n_{y_2} = 4$ liefert, da ein Hinzufügen weiterer Blockspalten zur Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ jeweils zu Matrizen mit nicht vollem Spaltenrang führt. Bei der grundlegenden Methode entsteht also ein ARX-Modell vierter Ordnung, welches um ein Modell zweiter Ordnung ergänzt wird.

Bei der erweiterten Methode wird die Ordnung des MIMO-ARX-Modells zu $n_{\text{ARX}} = 4$ entsprechend der individuellen Ordnung des zweiten Ausgangs gewählt. Nun wird die Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ des zweiten Ausgangs nacheinander mit den Spalten der Matrix

$$[\mathbf{W}_1] = \begin{pmatrix} [y_1(3)] & [y_1(4)] \\ [y_1(4)] & [y_1(5)] \\ \vdots & \vdots \\ [y_1(998)] & [y_1(999)] \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

erweitert, welche die Daten des ersten Ausgangs enthält. Keine der beiden Spalten kann jedoch zur Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}]$ weitere Information hinzufügen, da durch beide Erweiterungen ein Abfall des Spaltenrangs ausgelöst wird. Somit ist wie im vorherigen Beispiel $\alpha = 0$, was für dieses System die Ordnung einer Minimalrealisierung im Zustandsraum $n = 4$ liefert.

4.3.3 Bestimmung der minimalen Modellordnung

Die in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen Verfahren zur direkten Erweiterung der MISO-Ordnungsbestimmung für MIMO-Systeme führt im Allgemeinen nicht zu einem ARX-Modell minimaler Ordnung. Daher wird im folgenden Abschnitt eine alterna-

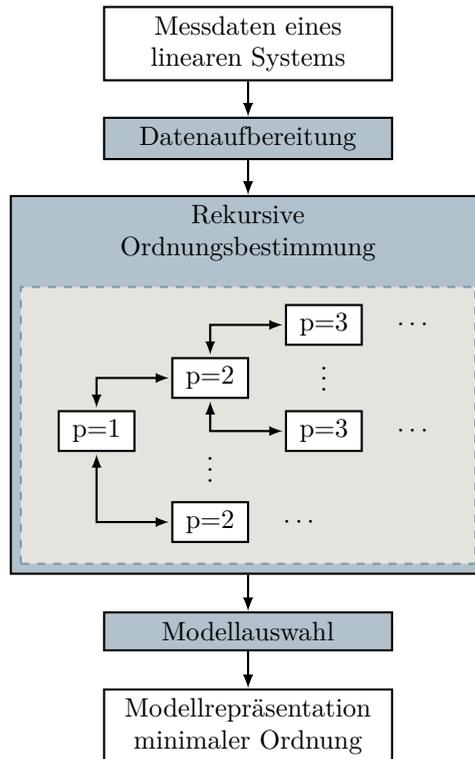


Abbildung 4.6: Ablauf der Ordnungsbestimmung für die minimale ARX-Ordnung im MIMO-Fall

tive Vorgehensweise präsentiert, um diesen Nachteil zu vermeiden. Die Grundidee des vorgestellten rekursiven Verfahrens ist es, eine Kombination an Spalten der Datenmatrix zu finden, welche das System vollständig beschreibt und dafür möglichst wenige zeitliche Verschiebungen der Signale benötigt. In Abbildung 4.6 ist der prinzipielle Ablauf des Verfahrens kompakt dargestellt. Die wesentlichen Schritte sind zunächst eine Vorbereitung der Daten in geeigneten Datenmatrizen und -vektoren als Basis für die weiteren Verfahrensschritte. Die eigentliche Ordnungsbestimmung wird darauf aufbauend durch einen rekursiven Algorithmus durchgeführt, welcher verschiedene mögliche Modellrepräsentationen detektiert. Von diesen möglichen Modellen muss durch vorgegebene Auswahlkriterien im nächsten Schritt das für die geplante Anwendung passende ARX-Modell minimaler Ordnung ausgewählt werden. Die Verfahrensschritte werden im Folgenden ausführlich beschrieben.

Beschreibung des Verfahrens

Aufgrund der Voraussetzung, dass die Eingangssignale eine genügende Anregung beinhalten und somit linear unabhängig sind, verursachen diese keinen Rangabfall der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$. Zur Auswahl der Kombination der Spalten ist es somit ausreichend die Ausgangssignale zu variieren. Um eine Vorbereitung der Daten zu ermöglichen und zudem die Rekursionstiefe zu begrenzen, muss eine maximal zu berücksichtigende Verzögerung p_{\max} vorgegeben werden, welche größer als die tatsächliche minimale Ordnung n_{ARX} des Systems ist.

Zu Beginn des Verfahrens werden die Messdaten bei der Datenaufbereitung in zeitlich gegeneinander verschobene Datenmatrizen und -vektoren angeordnet. Die Ausgangssignale $y_i, i = 1, \dots, n_y$ werden für $q = 1, \dots, p_{\max}$ zeitliche Verschiebungen in Vektoren

$$[\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}] = \begin{pmatrix} [y_i(p_{\max} - q + 1)] \\ [y_i(p_{\max} - q + 2)] \\ \vdots \\ [y_i(N - q)] \end{pmatrix} \quad (4.25a)$$

zusammengefasst. Um bei den Eingangssignalen einen möglicherweise vorhandenen Durchgriff mit zu berücksichtigen, beginnen die Datenmatrizen

$$[\tilde{\mathbf{U}}_q] = \begin{pmatrix} [\mathbf{u}^T(p_{\max} - q + 1)] \\ [\mathbf{u}^T(p_{\max} - q + 2)] \\ \vdots \\ [\mathbf{u}^T(N - q)] \end{pmatrix} \quad (4.25b)$$

bereits für die zeitliche Verschiebung $q = 0$ und werden somit für $p_{\max} + 1$ zeitliche Verschiebungen aufgestellt. Da die Eingangssignale keinen Rangabfall verursachen, können sie im weiteren Verlauf des Verfahrens blockweise genutzt werden, sodass eine Aufteilung in einzelne Vektoren im Gegensatz zu den Ausgangssignalen nicht erforderlich ist. Die vorbereiteten Daten nach den Gleichungen (4.25a) und (4.25b) haben alle dieselbe Zeilenzahl und ermöglichen später die Kombination verschiedener zeitlicher Verschiebungen zu einer temporären Datenmatrix. Zur Verdeutlichung dieser Schreibweise kann die reellwertige Matrix \mathbf{Z} aus Gleichung (4.4) mit den soeben eingeführten Größen als

$$\mathbf{Z} = \left(\tilde{\mathbf{U}}_p \quad \tilde{\mathbf{y}}_{p,1} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{U}}_1 \quad \tilde{\mathbf{y}}_{1,1} \quad \tilde{\mathbf{U}}_0 \right) \quad (4.26)$$

geschrieben werden.

In jedem Schritt des Verfahrens wird eine Auswahl der Datenvektoren $[\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}]$ gemeinsam mit den Eingangsdaten $[\tilde{\mathbf{U}}_q]$ bis zur jeweils aktuell betrachteten Ordnung p zur temporären Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}_p]$ kombiniert. Durch die Kombinationsmatrix

$$\mathbf{\Omega}_p \in \{0, 1\}^{p \times n_y} \quad (4.27)$$

wird vermerkt, welche der Ausgangsdaten $[\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}]$ dabei verwendet werden. Die Spalten beschreiben in der Kombinationsmatrix den jeweiligen Ausgang und die Zeilen die zeitliche Verzögerung des Signals. Somit bedeutet $\Omega_{q,i} = 1$, dass $[\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}]$, also das um q Abtastschritte verzögerte Signal y_i , in $[\tilde{\mathbf{Z}}_p]$ enthalten ist. Durch Vorgabe der maximal betrachteten Signalverzögerung p_{\max} entstehen insgesamt $(2^{n_y} - 1)^{p_{\max}}$ mögliche Kombinationsmatrizen, welche untersucht werden müssten. Um die Anzahl der Untersuchungen auf ein handhabbares Maß zu reduzieren, kann das im Folgenden beschriebene rekursive Verfahren genutzt werden.

Das Verfahren untersucht ausgehend von der initialen Ordnung $p = 1$ und der leeren Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_0 = ()$ die temporäre Matrix $[\tilde{\mathbf{Z}}_p]$. In jedem Rekursionsschritt wird die Kombinationsmatrix des vorherigen Schritts $\mathbf{\Omega}_{p-1}$ um alle Kombinationen der Ausgangssignale mit der aktuell betrachteten zeitlichen Verzögerung erweitert, was $2^{n_y} - 1$ Möglichkeiten ergibt. Jede der so entstehenden Matrizen

$$\mathbf{\Omega}_{p,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_{p-1} \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, 2^{n_y} - 1 \quad (4.28)$$

mit der durch

$$\boldsymbol{\omega}_j \in \{0, 1\}^{1 \times n_y}, \quad \boldsymbol{\omega}_j \neq \mathbf{0} \quad (4.29)$$

beschriebenen Kombination repräsentiert einen Kandidaten für ein ARX-Modell. Um zu untersuchen, welche der Kandidaten tatsächlich zum betrachteten System passen, wird für jede der Kombinationsmatrizen eine Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}_p]$ aufgestellt. Dazu werden die Eingangsdaten $[\tilde{\mathbf{U}}_0], \dots, [\tilde{\mathbf{U}}_p]$ bis zur betrachteten Ordnung p mit den durch die Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p,j}$ beschriebenen Ausgangsdaten $[\tilde{\mathbf{y}}_{p,i}]$ zur Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}_p]$ zusammengefasst. Diese temporären Datenmatrizen $[\tilde{\mathbf{Z}}_p]$ werden wie bei den bereits vorgestellten Verfahren zur Ordnungsbestimmung auf vollen Spaltenrang überprüft, indem die Kriterien aus Abschnitt 2.2.2 angewendet werden. Falls die aktuell betrachtete Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}]$ vollen Spaltenrang hat, wird mit der zugehörigen Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p,j}$ und der Ordnung $p = p + 1$ ein neuer Rekursionsschritt begonnen.

Wenn dagegen keine der temporären Datenmatrizen $[\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}]$ im aktuellen Rekursionsschritt vollen Spaltenrang hat, bedeutet dies, dass die Modellordnung nicht auf das aktuelle p erhöht werden kann. Alle Ausgangsspalten mit Verschiebung p

können keine weitere Information zu der durch die Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p-1}$ des vorherigen Rekursionsschritts beschriebenen Datenmatrix beitragen. Die Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p-1}$ enthält somit sämtliche Informationen der Ausgangssignale für die Verzögerung $1, \dots, p$. Da alle Informationen der Ausgangsspalten mit Verzögerung p in den Spalten der Verzögerungen $1, \dots, p-1$ enthalten sind, gilt dies entsprechend für Ausgangsspalten mit Verzögerung $p+1$, deren Information in den um $2, \dots, p$ Abtastschritte verzögerten Spalten enthalten ist. Dies wiederum entspricht der Information in den Spalten der Verzögerungen $1, \dots, p-1$, da die Spalten mit Verzögerung p hierdurch substituiert werden können. Somit führt das Hinzufügen von Ausgangsspalten mit Verzögerung $p+1$ zur Datenmatrix der Ordnung $p-1$ ebenfalls zu einem Abfall des Spaltenrangs der temporären Datenmatrix. Eine weitere Erhöhung der Ordnung auf $p+1$ oder mehr ist somit nicht möglich. Der Algorithmus beendet daher die Rekursion, sobald alle temporären Datenmatrizen $[\mathbf{Z}_{p,j}]$ nicht den vollen Spaltenrang haben und liefert die Rückgabewerte $p-1$ als mögliche Systemordnung und die Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p-1}$ als mögliche Modellrepräsentation an den vorherigen Rekursionsschritt. Somit ist dieser Zweig der Rekursion abgeschlossen. Ein weiterer Grund, die Rekursion in einem Zweig zu beenden, liegt vor, falls in dem Zweig keine Ordnung $p < p_{\max}$ gefunden wurde. Dieser Zweig wird somit als nicht erfolgreich gekennzeichnet und die Rekursion in dem Zweig beendet.

Wenn in einem Rekursionsschritt mehrere Zweige eine gültige Modellrepräsentation zurückliefern, muss eine Auswahl getroffen werden, welche der Modellrepräsentationen weiter verwendet werden soll und an den übergeordneten Rekursionsschritt zurückgegeben wird. Als wesentliches Auswahlkriterium wird im Verfahren die Ordnung der Modellrepräsentation genutzt, da ein Modell minimaler Ordnung gesucht wird. Sollten mehrere Modellrepräsentationen dieselbe Ordnung aufweisen, wird dadurch eine weitere Auswahl entsprechend der geplanten Modellnutzung ermöglicht.

In dieser Arbeit wird als Auswahlkriterium bei gleicher Ordnung die Anzahl der in der Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_p$ enthaltenen Nullen verwendet. Eine Null in der Kombinationsmatrix bedeutet, dass das zugehörige Ausgangssignal mit der entsprechenden Verzögerung keinen Beitrag zum Modell liefert, was bei der Parameteridentifikation in Abschnitt 5.1.2 vorteilhaft genutzt werden kann. Die zu diesen Signalen zugehörigen Modellparameter sind reellwertig Null und müssen nicht als Parametermenge identifiziert werden, was die Unsicherheit im Modell reduziert. Falls diese Auswahlkriterien noch nicht eindeutig sind, wird in dieser Arbeit das Modell bevorzugt, bei dem die kleineren Verzögerungen der Ausgangssignale genutzt werden. Die hier verwendeten Auswahlkriterien können je nach Anforderungen an das Modell problemlos angepasst oder durch andere Kriterien ersetzt werden.

Wenn alle Rekursionsschritte abgeschlossen sind, kann auf oberster Rekursionsebene eine Modellrepräsentation wie in den vorherigen Rekursionsschritten ausgewählt werden, was die Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p_{\min}}$ für ein Modell der minimalen Ordnung

$n_{\text{ARX}} = p_{\text{min}}$ ergibt. Falls jedoch alle Rekursionszweige als ungültig markiert wurden, sind Voraussetzungen nicht erfüllt oder die Rekursionstiefe p_{max} war nicht ausreichend groß, weshalb die Ordnungsbestimmung nicht erfolgreich abgeschlossen wurde.

In Algorithmus 1 ist der rekursive Teil des Verfahrens als Pseudo-Code detailliert angegeben. Die Syntax orientiert sich an MATLAB. Größen, die als *global* gekennzeichnet sind, werden in der Datenaufbereitung angelegt und stehen in jedem Rekursionsschritt für lesende Zugriffe zur Verfügung.

In der bisher beschriebenen Form kann das Verfahren, wie auch die Verfahren in den Abschnitten 4.2.1 und 4.3.1, für einen zusammenhängenden Datensatz der Eingangs- und Ausgangsdaten genutzt werden. Häufig liegen jedoch unzusammenhängende Datensätze oder Datensatzfragmente vor. Ein direktes Aneinanderreihen der Signalverläufe vor der Ordnungsbestimmung ist aber nicht möglich. Beim Aufbau der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ werden die Signale für jede Blockspalte um einen Schritt zeitlich verschoben. Durch das direkte Aneinanderreihen der Signale aus unterschiedlichen Datensätzen werden somit in den Zeilen der Datenmatrix Datensätze vermischt. Da die Zeilen der Datenmatrix direkt mit den Parametern des ARX-Modells zusammenhängen, führt diese Vermischung unterschiedlicher Datensätze zu Problemen.

Um dieses Problem zu vermeiden ohne für jeden Datensatz eine individuelle Ordnungsbestimmung durchzuführen, werden die Datensätze zunächst einzeln behandelt. Dazu werden die Datenmatrizen und -vektoren aus Gleichung (4.25) für jeden Datensatz individuell aufgebaut. Die so für jeden Datensatz individuell aufgestellten Daten in $[\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}]$ und $[\tilde{\mathbf{U}}_q]$ werden anschließend durch einfaches Aneinanderreihen zu gemeinsamen Matrizen und Vektoren für alle Datensätze kombiniert. Bei den Verfahren aus den Abschnitten 4.2.1 und 4.3.1 entspricht dies dem individuellen Aufbau der Datenmatrizen $[\mathbf{Z}]$ je Datensatz und anschließendem Aneinanderreihen dieser Matrizen. Die Ordnungsbestimmung wird anschließend mit den so erzeugten kombinierten Datenstrukturen aller Datensätze durchgeführt. Dadurch wird sichergestellt, dass sich die Verschiebung der Signale auf die einzelnen Datensätze beschränkt und in den Zeilen der Datenmatrix keine Mischung der Datensätze erfolgt.

Verringerung der notwendigen Berechnungen

Der im vorherigen Abschnitt vorgestellte rekursive Algorithmus bestimmt sämtliche mögliche Modellrepräsentationen eines MIMO-ARX-Modells bis zur Ordnung p_{max} , welche zu den vorliegenden Daten konsistent sind. Für viele Anwendungen werden jedoch nicht alle Modellrepräsentationen benötigt, sondern lediglich ein Modell minimaler Ordnung. Daher werden zwei Ansätze zur Verringerung der Anzahl an notwendigen Ranguntersuchungen vorgeschlagen.

```

global :  $p_{\max}$ 
global :  $\forall q = 0, \dots, p_{\max} : [\tilde{\mathbf{U}}_q]$ 
global :  $\forall i = 1, \dots, n_y, \forall q = 1, \dots, p_{\max} : [\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}]$ 
1 function  $[\Omega_{p_{\min}}, p_{\min}] = \text{Rekursion}(p, \Omega_{p-1})$ 
2   if  $p == p_{\max}$ 
3     | return  $\Omega_{p_{\min}} = NaN, p_{\min} = NaN;$  %Ungültiger Zweig der Rekursion
4   end
5   for  $j = 1, \dots, 2^{n_y} - 1$ 
6     |  $\Omega_{p,j} = (\Omega_{p-1}; \omega_j);$  %Füge  $j$ -te Kombination der Ausgänge hinzu
7     |  $[\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}] = ([\tilde{\mathbf{U}}_0], \dots, [\tilde{\mathbf{U}}_p], \text{alle in } \Omega_{p,j} \text{ gewählten Ausgänge } [\tilde{\mathbf{y}}_{q,i}]);$ 
8     | if  $\text{srang}([\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}]) == \text{voll}$  % Spaltenrangprüfung nach Abschnitt 2.2.2
9       | |  $[\Omega_{p_{\min},j}, p_{\min,j}] = \text{Rekursion}(p+1, \Omega_{p,j});$ 
10      end
11    end
12    if  $\forall j = 1, \dots, 2^{n_y} - 1 : \text{srang}([\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}]) \neq \text{voll}$ 
13      | return  $\Omega_{p_{\min}} = \Omega_{p-1}, p_{\min} = p - 1;$ 
14    else if  $\forall j = 1, \dots, 2^{n_y} - 1 : p_{\min} == NaN$ 
15      | return  $\Omega_{p_{\min}} = NaN, p_{\min} = NaN;$ 
16    else
17      |  $j = \arg(\min_j(p_{\min,j}));$ 
18      | if  $\text{IstEindeutig}(j)$  %Prüfung ob minimales Modell eindeutig ist
19        | | return  $\Omega_{p_{\min}} = \Omega_{p_{\min},j}, p_{\min} = p_{\min,j};$ 
20      else
21        | |  $c = \text{Auswahlkriterium}(\Omega_{p_{\min},j});$  %Auswahlkriterium der Modellrepräsentation
22        | | return  $\Omega_{p_{\min}} = \Omega_{p_{\min},c}, p_{\min} = p_{\min,c};$ 
23      end
24    end
25  end

```

Algorithmus 1: Pseudo-Code des rekursiven Verfahrens

Die größte Auswirkung auf die Anzahl der Ranguntersuchungen wird durch eine dynamische Begrenzung der maximal zu betrachtenden Ordnung erreicht. In der bereits beschriebenen Form setzt der Algorithmus jeden Zweig der Rekursion solange fort, bis entweder eine Modellrepräsentation gefunden wurde oder die fest vorgegebene Rekursionstiefe p_{\max} erreicht wird. Bei der optimierten Form des Verfahrens kann nun die Rekursionstiefe verringert werden, sobald eine Modellrepräsentation gefunden wurde. Im Detail wird dazu, sobald keine der temporären Datenmatrizen $[\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}]$ in einem Rekursionsschritt vollen Spaltenrang hat, wie im grundlegenden Verfahren die Modellordnung $p-1$ als Rückgabewert für diesen Zweig bestimmt. Zusätzlich wird die maximale Rekursionstiefe auf $p_{\max} = p$ für alle folgenden Untersuchungen verringert. Dadurch wird erreicht, dass in den anderen Rekursionszweigen kein Abstieg tiefer als die soeben gefundene Ordnung der Modellrepräsentation erfolgt. Eine Verringerung auf dieselbe Ordnung $p-1$ würde verhindern, dass weitere Modellrepräsentationen derselben Ordnung gefunden werden, da zur Detektion der Ordnung $p-1$ alle temporären Datenmatrizen mit Verzögerungen bis p keinen vollen Spaltenrang aufweisen müssen, diese Matrizen bei $p_{\max} = p-1$ aber nicht mehr betrachtet würden. Durch die Begrenzung auf $p_{\max} = p$ bleibt somit die Möglichkeit zur Modellauswahl zwischen Modellrepräsentationen derselben Ordnung erhalten. Insgesamt wird bei dieser optimierten Variante des Verfahrens weiterhin nach Modellrepräsentationen mit derselben oder kleinerer Ordnung gesucht, jedoch nicht nach Modellen höherer Ordnung, die später bei der Modellauswahl minimaler Ordnung verworfen würden.

Eine weitere Optimierungsmöglichkeit kommt hauptsächlich bei Systemen mit vielen Ausgängen zum Tragen. Dazu wird die Anzahl der in jedem Rekursionsschritt betrachteten Kombinationen der Ausgangssignale durch die Berücksichtigung von Zwischenergebnissen reduziert. In jedem Rekursionsschritt müssen beim Verfahren in grundlegender Form $2^{n_y} - 1$ Kombinationen ω_j entsprechend Gleichung (4.29) geprüft werden. Wenn jedoch die Reihenfolge der Überprüfungen geschickt gewählt wird, können einige Kombinationen, die bereits betrachtete Signale enthalten, ausgeschlossen werden. Dazu werden zunächst Kombinationen untersucht, die lediglich ein Ausgangssignal $[\tilde{\mathbf{y}}_{p,i}]$ enthalten. Wenn durch Hinzufügen dieser einzelnen Spalte die temporäre Datenmatrix $[\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}]$ nicht mehr vollen Spaltenrang hat, kann die Information in $[\tilde{\mathbf{y}}_{p,i}]$ mittels der durch die Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{p-1}$ definierten Signale beschrieben werden. Weitere temporäre Datenmatrizen, welche dieses $[\tilde{\mathbf{y}}_{p,i}]$ enthalten, können somit ebenfalls nicht den vollen Spaltenrang haben, da schon $[\tilde{\mathbf{y}}_{p,i}]$ alleine zu einem Rangabfall führt. Daher können alle weiteren Kombinationen mit diesem Signal in diesem Rekursionsschritt ausgeschlossen werden. Dieser Ausschluss beschränkt sich dabei auf den aktuellen Rekursionsschritt, andere Zweige oder andere betrachtete Ordnungen bleiben hiervon unberührt und müssen separat betrachtet werden. Dadurch können in diesem Schritt bis zu $(2^{n_y-1} - 1)$ Kombinationen ausgeschlossen werden.

Sobald alle Kombinationen mit einem Ausgangssignal in dem Rekursionsschritt betrachtet wurden, wird das Verfahren mit Kombinationen aus zwei Signalen fortgesetzt. Auch dabei können Kombinationen, die zu einem Rangabfall der Datenmatrix verursachen, zu einem Ausschluss weiterer Kombinationen, die diese Signale enthalten, führen. Die Vorgehensweise wird durch Erhöhen der betrachteten Spaltenzahl in den Kombinationen solange fortgesetzt, bis alle Kombinationen der aktuellen Verzögerung p entweder überprüft oder verworfen wurden. Anschließend erfolgt wie im grundlegenden Verfahren der nächste Rekursionsschritt.

Bei beiden Optimierungsmöglichkeiten ist das Ausmaß der Verbesserung abhängig von der Reihenfolge der Untersuchung aller Kombinationen. Welche der Kombinationen dabei die größte Einsparung an Ranguntersuchungen ergibt, kann vorab nicht angegeben werden. Die optimierte Vorgehensweise führt jedoch in jedem Fall zu einer Verringerung der notwendigen Berechnungen und kann daher stets genutzt werden.

4.3.4 Beispiele zur Bestimmung der minimalen Ordnung von MIMO-ARX-Modellen

In diesem Abschnitt werden nochmals die beiden Beispielsysteme aus Abschnitt 4.3.2 betrachtet. Für das erste Beispielsystem erster Ordnung liefert die grundlegende Variante der Ordnungsbestimmung aus Abschnitt 4.3.3 vier mögliche Systemrepräsentationen erster und zweiter Ordnung mit den Kombinationsmatrizen

$$\mathbf{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Da ein Modell minimaler Ordnung gesucht ist, wird das einzige Modell mit Ordnung $n_{\text{ARX}} = 1$ als Ergebnis ausgewählt. Diese Kombination entspricht dem Modell in Gleichung (4.18). Das Modell mit der Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_{2,1}$ entspricht dem in Abschnitt 4.3.2 identifizierten Modell. Insgesamt sind im Verfahren 21 Rangüberprüfungen erforderlich um die vier möglichen Modellrepräsentationen zu finden.

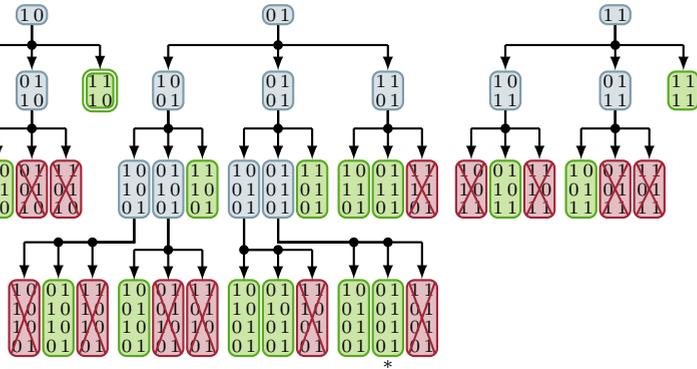
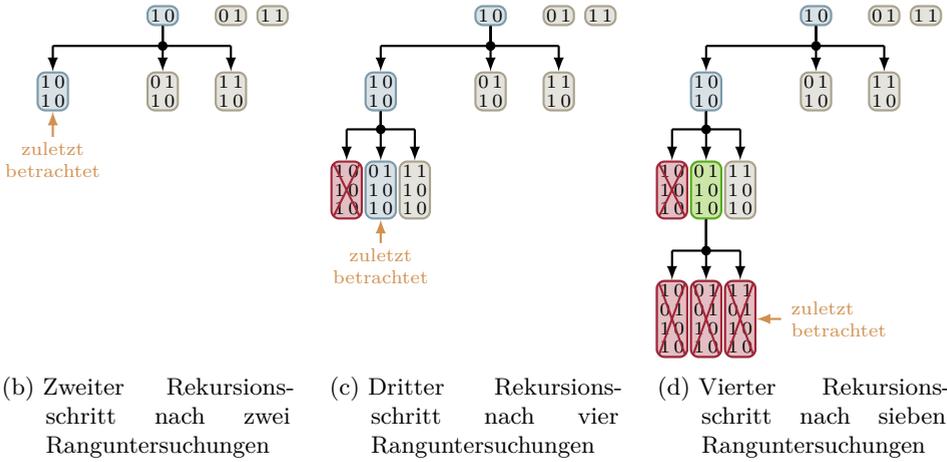
Durch Einsatz der optimierten Variante aus Abschnitt 4.3.3 kann die Anzahl der Rangüberprüfungen auf 12 bis 16 verringert werden. Dies ist abhängig von der Reihenfolge bei der Untersuchung der Kombinationen, wobei in diesem Beispiel $(2^{n_v} - 1)! = 6$ Untersuchungsreihenfolgen möglich sind. Dabei werden entweder eine, zwei oder alle vier möglichen Systemrepräsentationen gefunden.

Im Folgenden wird die Vorgehensweise am komplexeren Modell zweiter Ordnung aus Abschnitt 4.3.2 verdeutlicht. Dazu wird in Abbildung 4.7 die Vorgehensweise grafisch demonstriert. Die verwendeten Symbole sind in Legende 4.7(a) dargestellt.

$y_1 \ y_2$ $k-1 \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$y_1 \ y_2$ $k-1 \ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k-2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$y_1 \ y_2$ $k-1 \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k-2 & 1 & 1 \\ k-3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$y_1 \ y_2$ $k-1 \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k-2 & 0 & 1 \\ k-3 & 1 & 1 \\ k-4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div> bisher nicht betrachtet</div> <div> voller Spaltenrang</div> <div>✗ nicht voller Spaltenrang</div> <div> gültige Modellrepräsentation</div> </div>
--	---	--	---	---

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\tilde{\mathbf{Z}}_{p,j}] = \left([\tilde{\mathbf{U}}_2] \quad [\tilde{\mathbf{y}}_{2,1}] \quad [\tilde{\mathbf{y}}_{2,2}] \quad [\tilde{\mathbf{U}}_1] \quad [\tilde{\mathbf{y}}_{1,1}] \quad [\tilde{\mathbf{y}}_{1,2}] \quad [\tilde{\mathbf{U}}_0] \right)$$

(a) Legende der verwendeten Symbole und Farben



(e) Ergebnis nach Abschluss der Rekursion

Abbildung 4.7: Beispiel des grundlegenden rekursiven Verfahrens

Die Kombinationsmatrizen Ω werden dabei zur Verdeutlichung durch farbige Blöcke dargestellt, wobei die Farben das Ergebnis der Untersuchung im jeweiligen Rekursionsschritt repräsentieren. Kombinationen, die zum jeweiligen Schritt des Verfahrens noch nicht betrachtet wurden, sind durch eine graue Box gekennzeichnet. Blau bedeutet, dass die jeweils der Kombinationsmatrix entsprechende Datenmatrix vollen Spaltenrang hat, im Gegensatz zu den rot gekennzeichneten Fällen mit nicht vollem Spaltenrang. Die grüne Hinterlegung kennzeichnet schließlich eine vom Algorithmus erkannte mögliche Systemrepräsentation. Der Zusammenhang zwischen der Kombinationsmatrix und der temporären Datenmatrix ist in der Legende ebenso dargestellt wie die Bedeutung der einzelnen Zeilen und Spalten der Kombinationsmatrizen unterschiedlicher Dimension.

Das betrachtete Beispielsystem hat $n_y = 2$ Ausgänge, was in jedem Rekursionsschritt zu $2^{n_y} - 1 = 3$ möglichen Kombinationen führt. Zu Beginn des rekursiven Algorithmus mit $p = 1$ wird die Kombination $\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf vollen Spaltenrang untersucht und, da dies erfüllt ist, ein neuer Rekursionsschritt mit $p = 2$ basierend auf dieser Kombination gestartet. Abbildung 4.7(b) zeigt den Zustand nach der ersten Ranguntersuchung in diesem Rekursionsschritt. Da die betrachtete Kombination ebenfalls vollen Spaltenrang hat, wird ein neuer Rekursionsschritt mit $p = 3$ gestartet. Die erste betrachtete Kombination hat im Gegensatz zur zweiten Kombination nicht den vollen Spaltenrang. In Abbildung 4.7(c) ist der Status der Rekursion in diesem dritten Rekursionsschritt nach der insgesamt vierten Ranguntersuchung dargestellt. Da bei vollem Spaltenrang alleine noch keine Aussage zu möglichen Modellrealisierungen getroffen werden kann, wird für die zweite Kombination im dritten Rekursionsschritt ein neuer Rekursionsschritt mit $p = 4$ durchgeführt, welcher in Abbildung 4.7(d) dargestellt ist. In diesem vierten Rekursionsschritt hat keine der möglichen Kombinationen vollen Spaltenrang. Daraus folgt, dass die zuletzt betrachtete Kombination im dritten Schritt eine mögliche Modellrepräsentation ist.

Diese Vorgehensweise setzt sich so für sämtliche bisher nicht betrachteten Kombinationen fort. In Abbildung 4.7(e) ist das Ergebnis nach Abschluss der Rekursion dargestellt. Insgesamt liefert das Verfahren 16 mögliche Modellrepräsentationen im Bereich der Ordnungen $n_{\text{ARX}} = 2$ bis $n_{\text{ARX}} = 4$. Als Ergebnis des Verfahrens mit den in Abschnitt 4.3.3 beschriebenen Auswahlkriterien wird das ARX-Modell zweiter Ordnung mit der Kombination

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

gewählt, welches in der Abbildung durch eine doppelte Rahmenlinie gekennzeichnet ist. Dies entspricht dem in Gleichung (4.22) angegebenen Modell. Alternativ existiert eine weitere mögliche Modellrepräsentation zweiter Ordnung, die jedoch aufgrund der größeren Anzahl an Einträgen in der Kombinationsmatrix verworfen

wird. Zur Bestimmung der 16 Modellrepräsentationen wurden insgesamt 93 temporäre Datenmatrizen auf vollen Spaltenrang überprüft. Bei den Modellrepräsentationen vierter Ordnung ist eine Kombination mit einem Stern gekennzeichnet. Diese Lösung stellt das Ergebnis des erweiterten Verfahrens aus Abschnitt 4.3.1 dar, welche in Abschnitt 4.3.2 für dieses System ermittelt wurde.

In Abbildung 4.8 ist das Ergebnis der optimierten Vorgehensweise aus Abschnitt 4.3.3 für dasselbe Beispielsystem dargestellt. In der ersten Teilgrafik 4.8(a) beginnt das Verfahren die Untersuchung der Kombinationen jeweils mit dem zweiten Ausgangssignal. In der Abbildung ist dies der mittlere Zweig, welcher zunächst zu einigen Modellrepräsentationen vierter Ordnung führt. Im Laufe des Verfahrens wird die maximale Rekursionstiefe auf zunächst $p_{\max} = 4$ und schließlich $p_{\max} = 3$ verringert, was im dritten Rekursionszweig lediglich ein Modell zweiter Ordnung liefert. In diesem Fall werden insgesamt 12 Modellrepräsentationen durch 63 Ranguntersuchungen ermittelt. In Abbildung 4.8(b) ist das Ergebnis dargestellt, wenn zunächst die Kombinationen mit dem ersten Ausgangssignal untersucht werden. Hierbei werden lediglich einige Modelle dritter Ordnung sowie beide Modelle mit der minimalen Ordnung $p = 2$ detektiert. Insgesamt liefern 37 Ranguntersuchungen vier der 16 möglichen Modellrepräsentationen. Die in Abbildung 4.8(c) dargestellte dritte Variante startet die Untersuchung der Kombinationen jeweils unter Berücksichtigung beider Ausgangssignale. Dadurch werden lediglich die beiden Modellrepräsentationen minimaler Ordnung detektiert, allerdings sind 39 Ranguntersuchungen notwendig.

Allgemein führt ein Start der Untersuchung mit allen Ausgangssignalen häufig schnell zu einer Reduzierung der maximalen Rekursionstiefe p_{\max} , allerdings können keine Kombinationen mit einzelnen Signalen ausgeschlossen werden. Insgesamt führt die optimierte Variante des Verfahrens hier für alle Reihenfolgen bei der Untersuchung der Signalkombinationen zu einer Reduktion der Anzahl an Ranguntersuchungen. Wie stark diese Einsparung ausfällt, ist abhängig von der gewählten Reihenfolge und kann vorab nicht angegeben werden.

4.3.5 Anwendung der Ordnungsbestimmung für instabile Systeme

In den vorherigen Abschnitten wurde die Ordnungsbestimmung stets für Systeme im offenen Regelkreis betrachtet, was eine Einschränkung auf stabile Systeme bedeutet. Nur stabile Systeme können für längere Messungen ohne Regler betrieben werden, um die zur Ordnungsbestimmung notwendigen Messdaten zu erzeugen. Um diese Einschränkung aufzuheben, wird im Folgenden betrachtet, wie die Ordnungsbestimmung auch für instabile Systeme im geschlossenen Regelkreis genutzt werden kann.

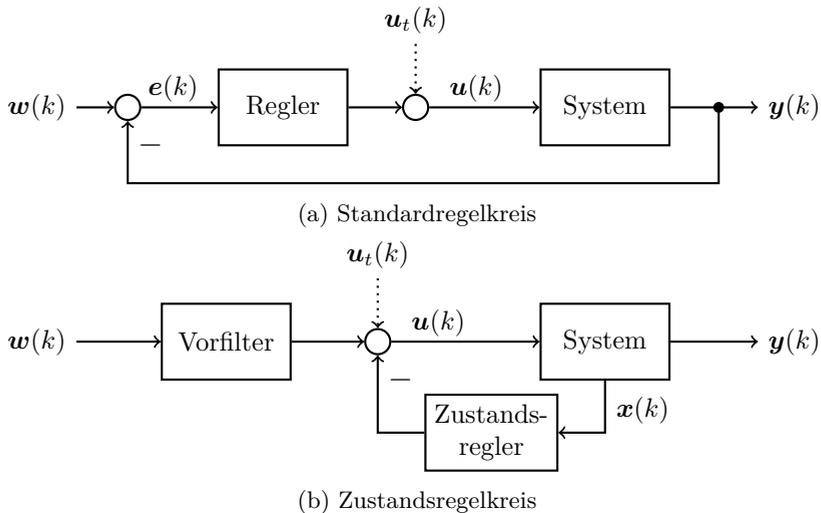


Abbildung 4.9: Struktur der betrachteten Regelkreise

In Abbildung 4.9 ist die Struktur des in dieser Arbeit betrachteten Regelkreises in Form des Standardregelkreises und im Zustandsraum dargestellt. Mit $w(k)$ wird dabei die Führungsgröße des Regelkreises und mit $y(k)$ die Ausgangsgröße bezeichnet. Im Standardregelkreis ist zudem die Regelabweichung $e(k)$ gekennzeichnet. Die gestrichelt dargestellte Größe $u_t(k)$ wird zunächst nicht betrachtet. Bei der Identifikation dynamischer Systeme im geschlossenen Regelkreis gibt es nach [IM11] zwei unterschiedliche Herangehensweisen:

1. Indirekte Identifikation: Dabei wird zunächst der gesamte Regelkreis als Ganzes betrachtet und ein Modell mit Eingang $w(k)$ und Ausgang $y(k)$ bestimmt. Anschließend wird der Regler, welcher als bekannt vorausgesetzt wird, aus dem Modell des Regelkreises herausgerechnet, um ein Modell des Systems zu erzeugen.
2. Direkte Identifikation: Bei dieser Vorgehensweise wird direkt ein Modell des Systems bestimmt, was eine Messung des Systemeingangs erfordert. Der Regler muss hierfür nicht bekannt sein. Durch die Rückführung im Regelkreis besteht eine Korrelation zwischen Systemeingang und Systemausgang, was bei der Identifikation berücksichtigt werden muss.

Bei der hier betrachteten Ordnungsbestimmung werden direkt die Eingangsdaten $u(k)$ und die Ausgangsdaten $y(k)$ des Systems genutzt, was der direkten Vorgehensweise bei der Identifikation entspricht. Im geschlossenen Regelkreis wird die Eingangsgröße des Systems $u(k)$ durch die über den Regler zurückgekoppelte Ausgangsgröße $y(k)$ beeinflusst. Da bei der Ordnungsbestimmung eine Untersuchung des Spaltenrangs der

Datenmatrix genutzt wird, muss eine lineare Abhängigkeit zwischen Systemausgang und -eingang vermieden werden. Um dies sicherzustellen und zudem eine ausreichende Anregung des Systems zu erreichen, wird eine entsprechende Führungsgröße mit ausreichender Anregung eingesetzt oder, sofern erforderlich, der Führungsgröße des Normalbetriebs der Anlage überlagert. Die Führungsgröße muss beim eingesetzten Regler eine direkte Auswirkung auf die Größe $\mathbf{u}(k)$ haben, was im Regler einen Durchgriff erfordert und beispielsweise durch einen Proportional-Anteil im Regler (P-Regler) gegeben ist. Durch die Überlagerung von $\mathbf{w}(k)$ und $\mathbf{y}(k)$ und den Durchgriff im Regler wird die lineare Abhängigkeit der Ein- und Ausgangsgrößen verhindert, sofern die Intervallbreiten der Messungen, wie in Abschnitt 4.2.2 gefordert, keine Überlappung von Spalten für alle Abtastpunkte verursachen. Auch für Systeme mit Durchgriff kann die Ordnungsbestimmung im geschlossenen Regelkreis wie soeben beschrieben durchgeführt werden.

Wenn der Regler keinen Durchgriff enthält, beispielsweise bei einem Regler mit ausgeprägtem Tiefpassverhalten, kann stattdessen ein Testsignal $\mathbf{u}_t(k)$ zwischen Regler und System genutzt werden. In Abbildung 4.9 ist dieses gestrichelt dargestellt. Die Eingangsgröße des Systems ergibt sich damit zu

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_{\text{Regler}}(k) + \mathbf{u}_t(k). \quad (4.32)$$

Für das Testsignal gelten dann die bereits beschriebenen Anforderungen bezüglich ausreichender Anregung und linearer Unabhängigkeit zum Ausgangssignal. Eine Führungsgröße ist bei Nutzung eines Testsignals nicht erforderlich und kann zur Einstellung eines Arbeitspunktes verwendet werden.

Die Auslegung des Reglers zur Stabilisierung des Systems wird in dieser Arbeit nicht betrachtet. Für Eingrößensysteme können beispielsweise heuristische Verfahren wie *Ziegler-Nichols* genutzt werden, für Mehrgrößensysteme wird auf die entsprechende Literatur, beispielsweise [CD95], verwiesen.

4.3.6 Beispiel eines instabilen Systems

Die Ordnungsbestimmung im geschlossenen Regelkreis wird im Folgenden anhand eines Beispielsystems der Ordnung $n_{\text{ARX}} = 2$ mit zwei Ausgängen und zwei Eingängen demonstriert. Im betrachteten System ist zudem ein Durchgriff vorhanden. Die

Parametermatrizen des Modells entsprechend Gleichung (2.11) sind durch

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,5 \\ 0,0 & 1,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0,0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2,0 & -0,1 \\ -0,1 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,2 \end{pmatrix} \quad (4.33b)$$

gegeben. Im Zustandsraum nach Gleichung (2.12) liegt eine Minimalrealisierung des Systems durch die Matrizen

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -0,60 & 0,00 \\ 1 & 0,20 & -0,50 \\ 0 & 0,00 & 1,50 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0,34 & -0,50 \\ 1,52 & 0,00 \\ 1,40 & 0,10 \end{pmatrix}, \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,10 & 1,00 \\ 1,00 & 0,20 \end{pmatrix} \quad (4.34b)$$

vor.

Um dieses System für die Erzeugung von Daten zu simulieren, wird ein Zustandsregler mit der Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} -0,05 & -0,04 & 1,51 \\ -0,76 & -0,09 & 0,95 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

eingesetzt, um das System zu stabilisieren sowie ein statisches Vorfilter

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,37 \\ -0,99 & -1,31 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

für stationäre Genauigkeit. Die Lage der Pole des geregelten und des ungeregelten Systems sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Daran ist erkennbar, dass der instabile Pol durch den Regler stabilisiert wird.

Für die Erzeugung der Daten wird der geschlossene Regelkreis für 1 000 Abtastpunkte simuliert, analog zu den bisherigen Beispielen. Diese Daten werden mit einem gleichverteilten Fehler der Amplitude 1‰ jeweils bezogen auf die maximale Signalamplitude überlagert und durch Intervalle eingeschlossen, was Intervallen mit den Radien $u_{1,\Delta} = 8,7 \times 10^{-3}$, $u_{2,\Delta} = 10,9 \times 10^{-3}$, $y_{1,\Delta} = 19,6 \times 10^{-3}$ und $y_{2,\Delta} = 4,6 \times 10^{-3}$ entspricht. Die Führungsgröße wird dabei zu $\mathbf{w}(k) = \mathbf{0}$ für alle Abtastpunkte k als Arbeitspunkt vorgegeben. Die Anregung des Systems wird durch (pseudo) weißes gaußsches Rauschen mit Varianz $\sigma^2 = 1$ als Testsignal $\mathbf{u}_t(k)$ realisiert und somit der Stellgröße überlagert. Anhang D.1 fasst die zur Simulation genutzten Einstellungen dieses instabilen Systems nochmals als Tabelle zusammen.

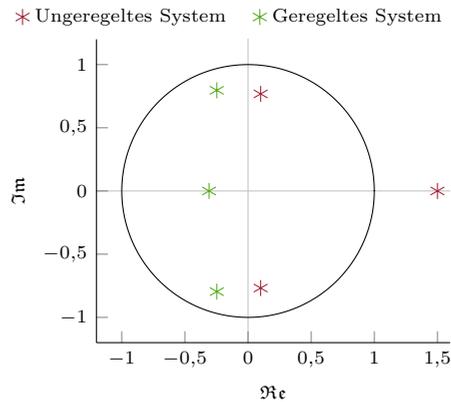


Abbildung 4.10: Lage der Systempole des Beispielsystems

Durch die Ordnungsbestimmung mit dem Verfahren aus Abschnitt 4.3.3 wird die korrekte ARX-Modellordnung $n_{\text{ARX}} = 2$ mit der Kombinationsmatrix

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

aus sechs möglichen Modellrepräsentationen zweiter und dritter Ordnung ausgewählt. Dazu sind ohne Optimierung 39 Ranguntersuchungen erforderlich.

Durch das optimierte Verfahren wird die Anzahl der Ranguntersuchungen auf 23 bis 29 reduziert. In Abhängigkeit der Reihenfolge der Untersuchungen in der Rekursion werden dabei zwischen zwei und sechs mögliche Modellrepräsentationen erkannt. Das Verfahren zur direkten MIMO-Erweiterung aus Abschnitt 4.3.1 dagegen liefert für das System die minimale Zustandsraumordnung $n = 3$ und die ARX-Modellordnung $n_{\text{ARX}} = 3$, welche die minimale Systemordnung übersteigt. Das Beispiel wird zur Parameteridentifikation in Abschnitt 5.1.3 wieder aufgegriffen.

4.4 Zusammenfassung und Überblick

Im vierten Kapitel dieser Arbeit wurde die Ordnungsbestimmung eines linearen zeitdiskreten Systems anhand von Intervall-Messdaten betrachtet. Die Grundidee des Verfahrens beruht auf der Analyse des Spaltenrangs von Datenmatrizen und wurde zunächst für Systeme mit nur einer Ausgangsgröße vorgestellt.

Um die Ordnung eines SISO- oder MISO-Systems zu bestimmen, werden zunächst die gemessenen Intervalldaten der Eingangssignale und des Ausgangssignals in Datenmatrizen angeordnet, indem jede Blockspalte um einen Abtastschritt verschoben wird. Dadurch entsteht eine Matrixstruktur ähnlich zu einer Block-Hankel-Matrix. Sobald die Anzahl der Blockspalten größer wird als die Systemordnung, hat die Datenmatrix nicht mehr den vollen Spaltenrang. Voraussetzung ist dabei, dass durch die aufgenommenen Daten kein zusätzlicher Rangabfall durch zu große Intervallbreiten oder eine zu geringe Abtastzeit auftritt, was in diesem Kapitel erläutert wurde.

Für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen gestaltet sich die Ordnungsbestimmung etwas schwieriger, da die eingesetzte ARX-Modellform in diesem Fall nicht eindeutig ist und Kopplungen zwischen den Ausgängen bestehen können. Daher wurden in diesem Kapitel verschiedene Erweiterungsmöglichkeiten der Ordnungsbestimmung auf MIMO-Systeme vorgestellt. Das Verfahren zur direkten Erweiterung liefert zwar nicht die minimale Ordnung des ARX-Modells, dafür jedoch die Ordnung einer Minimalrealisierung im Zustandsraum. Weiterhin wurde in diesem Abschnitt ein Verfahren zur Bestimmung der minimalen Ordnung des ARX-Modells vorgestellt. Dabei handelt es sich um einen rekursiven Algorithmus, welcher alle relevanten Kombinationen der Ausgangssignale in den Datenmatrizen untersucht. Zusätzlich wurden verschiedene Ansätze zur Verringerung der notwendigen Ranguntersuchungen im Rahmen eines optimierten Verfahrens vorgestellt. Außerdem wurde in diesem Kapitel betrachtet, wie die Ordnung eines instabilen Systems im geschlossenen Regelkreis bestimmt werden kann.

Bei den hier vorgestellten Verfahren handelt es sich um die ersten bekannten Verfahren zur Ordnungsbestimmung für Systeme mit beschränkten Unsicherheiten direkt aus den Messdaten. Insgesamt kann mittels der vorgestellten Verfahren die minimale Ordnung für ARX-Modelle mit einer oder mehreren Ausgangsgrößen bestimmt werden. Auch die Bestimmung der Ordnung einer Minimalrealisierung im Zustandsraum ist möglich. Da die in allen Verfahren notwendige Untersuchung des Spaltenrangs von Intervallmatrizen mit den genutzten Kriterien sehr schnell durchgeführt werden kann, ist die zur Ordnungsbestimmung notwendige Rechenzeit gering. Alle vorgestellten Ansätze zur Ordnungsbestimmung wurden anhand verschiedener Beispielsysteme veranschaulicht. Im nächsten Kapitel wird vorgestellt, wie diese Ordnungsbestimmung zu einem kompletten Verfahren zur Black-Box-Identifikation ergänzt werden kann und wie dabei neben der Modellordnung auch die zur Ordnungsbestimmung genutzten Datenmatrizen geschickt eingesetzt werden können.

Kapitel 5

Mengenbasierte Black-Box-Identifikation und Fehlerdetektion

In diesem Kapitel wird eine Methode zur Black-Box-Identifikation bei Messdaten mit beschränkter Unsicherheit vorgestellt. Die Vorgehensweise gliedert sich dabei in zwei Schritte. Zunächst wird bei der Ordnungsbestimmung die Ordnung eines Modells für das betrachtete System bestimmt. Sobald die Modellordnung und somit die Modellstruktur feststeht, werden im zweiten Schritt die Parameter dieses Modells bestimmt. Dazu werden Parameteridentifikationsverfahren, wie die in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren aus der Literatur, mit der Ordnungsbestimmung aus Kapitel 4 kombiniert. Die damit gewonnenen Modelle mit unsicheren Parametern werden danach zur Fehlerdetektion eingesetzt.

Im ersten Teil des Kapitels wird zunächst beschrieben, wie neben der Modellordnung aus der Ordnungsbestimmung auch die dort eingesetzten Datenstrukturen geschickt bei der Parameteridentifikation genutzt werden können. Anschließend wird eine Erweiterung des Parameteridentifikationsverfahrens mit Zonotopen (vgl. Abschnitt 3.2.5) für den EIV-Fall vorgestellt. Weiterhin wird eine Lösungsmethode für überbestimmte Intervall-Gleichungssysteme beschrieben, welche auf einigen Verfahren aus Abschnitt 3.2.1 basiert und diese vorteilhaft kombiniert. Zur Verdeutlichung werden die Beispielsysteme aus Kapitel 4 erneut betrachtet. Dabei kommen neben dem Lösungsverfahren für überbestimmte IGS unterschiedliche Parameteridentifikationsverfahren aus Kapitel 3 zum Einsatz. Der zweite Teil des Kapitels widmet sich einer Anwendungsmöglichkeit der durch Black-Box-Identifikation gewonnenen Modelle. Dazu wird in Anlehnung an die Zustandsmengenbeobachter (vgl. Abschnitt 3.3) zunächst ein Filter für ARX-Modelle vorgestellt. Dieses Filter wird ebenso wie weitere Verfahren zur Fehlerdetektion auf einige der bereits betrachteten Beispielsysteme angewandt. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Zusammenfassung.

5.1 Black-Box-Identifikation

Die wesentlichen Komponenten zur Black-Box-Identifikation sind die Ordnungsbestimmung und die Parameteridentifikation. Mit den Verfahren aus der Literatur, die in Kapitel 3 vorgestellt wurden, und der Ordnungsbestimmung aus Kapitel 4 stehen diese Komponenten zur Verfügung. Das Verfahren kann dazu genutzt werden, um basierend auf Messdaten mit beschränkter Unsicherheit, welche durch Intervalle repräsentiert werden, ein ARX-Modell für das System zu bestimmen. Die einzelnen Komponenten des Identifikationsverfahrens werden dazu nochmals betrachtet und, sofern nötig, für die Anwendung zur Black-Box-Identifikation angepasst.

5.1.1 Überblick über das Verfahren

Die Ordnungsbestimmung aus Kapitel 4 wurde so aufgebaut, dass keine Anpassungen zur Nutzung bei der Black-Box-Identifikation notwendig sind. Daher kann das Ergebnis der Ordnungsbestimmung prinzipiell direkt zur Parameteridentifikation mit einem beliebigen Verfahren aus der Literatur (vgl. Kapitel 3) genutzt werden. Welches konkrete Verfahren dabei eingesetzt werden soll, hängt von der geplanten Nutzung des Modells und der gewünschten Unsicherheitsbeschreibung ab. Abbildung 5.1(a) stellt diesen Ablauf nochmals kompakt für MISO-Systeme dar.

Bei der Parameteridentifikation eines MIMO-Systems müssen jedoch die möglichen Kopplungen zwischen den Ausgängen vom Identifikationsverfahren mit berücksichtigt werden. Dies wird durch die bei der Ordnungsbestimmung gewonnene zusätzlichen Informationen zum System in Form der Datenmatrix $[Z]$ der finalen Systemordnung und der detektierten Kopplungen deutlich erleichtert. Dazu wird ein zusätzlicher Verfahrensschritt nach der Parameteridentifikation des MIMO-Systems genutzt, was in Abbildung 5.1(b) dargestellt ist und im nächsten Abschnitt detailliert vorgestellt wird. Auch im MIMO-Fall können somit prinzipiell beliebige Parameteridentifikationsverfahren mit der Ordnungsbestimmung kombiniert werden.

Das so identifizierte ARX-Modell minimaler Ordnung kann bei Bedarf mit der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.1.3 in ein Modell in Zustandsraumdarstellung umgeformt werden. Für MIMO-Systeme kann jedoch im Zustandsraum keine Minimalrealisierung angegeben werden.

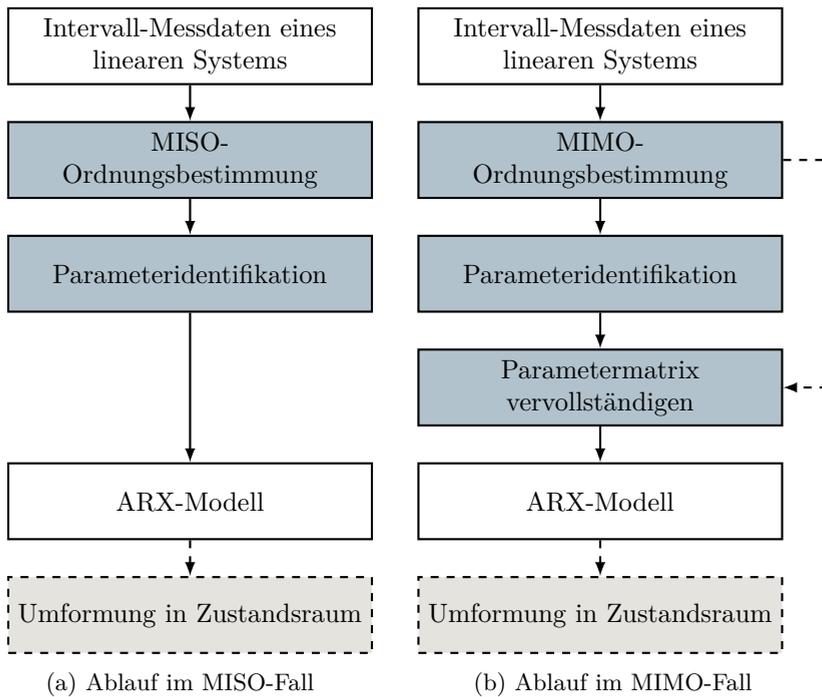


Abbildung 5.1: Ablauf der mengenbasierten Black-Box-Identifikation für Messdaten mit beschränkter Unsicherheit

5.1.2 Erweiterungen der Parameteridentifikation

Im Folgenden wird der Schritt der Parameteridentifikation im Black-Box-Identifikationsverfahren detailliert betrachtet. Zunächst wird beschrieben wie die bei der Ordnungsbestimmung genutzten Datenmatrizen bei der Parameteridentifikation genutzt werden können. Anschließend werden zwei neue Parameteridentifikationsverfahren vorgestellt, welche eine Erweiterung von Verfahren aus Kapitel 3 darstellen.

Nutzung der Datenmatrizen aus der Ordnungsbestimmung

Die bei der Ordnungsbestimmung genutzte Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ kann im MISO-Fall direkt als Regressor zur Schätzung eines ARX-Modells anhand des IGS entsprechend der Form (3.4)

$$[\mathbf{Z}][\boldsymbol{\vartheta}] = [\mathbf{o}] \quad (5.1)$$

mit dem Vektor

$$[\mathbf{o}] = \left([y(n_{\text{ARX}} + 1)] \quad [y(n_{\text{ARX}} + 2)] \quad \cdots \quad [y(N)] \right)^{\text{T}} \quad (5.2)$$

der Messdaten des Systemausgangs eingesetzt werden. Der Vektor $[\boldsymbol{\vartheta}]$ enthält dabei die Modellparameter des ARX-Modells (2.10) entsprechend:

$$[\boldsymbol{\vartheta}] = \left([\mathbf{b}_{n_{\text{ARX}}}]^{\text{T}} \quad [a_{n_{\text{ARX}}}] \quad \dots \quad [\mathbf{b}_1]^{\text{T}} \quad [a_1] \quad [\mathbf{b}_0]^{\text{T}} \right)^{\text{T}}. \quad (5.3)$$

Auch im MIMO-Fall ist dies grundsätzlich möglich, es kommt jedoch ein weiterer Schritt hinzu. Wie im MISO-Fall wird bei der Ordnungsbestimmung eine Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ für das betrachtete System aufgestellt. Beim Verfahren zur direkten MISO-Erweiterung aus Abschnitt 4.3.1 geschieht dies explizit bei der Ordnungsbestimmung, da diese Matrix für die Untersuchung auf vollen Spaltenrang genutzt wird. Beim Verfahren zur Bestimmung der minimalen Modellordnung aus Abschnitt 4.3.3 werden die Datenmatrizen im rekursiven Algorithmus nur temporär aufgebaut, um den Austausch großer Datenmatrizen zwischen den Rekursionsschritten zu vermeiden. Daher muss nach Auswahl des Modells für die gewählte Signalkombination die Datenmatrix neu aufgebaut werden. Diese Datenmatrix enthält nun Spalten der zeitlich verschobenen Eingangs- und Ausgangssignale, welche mit den zur Systembeschreibung notwendigen Parametern zusammenhängen. Die Parameteridentifikation des MIMO-Systems mit der Datenmatrix $[\mathbf{Z}]$ liefert für diese Parameter einen Einschluss der Parametermenge. Dabei liegen die Parameter in Form einer Parametermatrix $[\boldsymbol{\Theta}]$

vor, welche die Parametermatrizen des Modells (2.11) gemäß

$$[\Theta] = \left([B_{n_{\text{ARX}}}]^T \quad [A_{n_{\text{ARX}}}]^T \quad \dots \quad [B_1]^T \quad [A_1]^T \quad [B_0]^T \right)^T \quad (5.4)$$

enthält.

Wenn beim Aufbau der Datenmatrix $[Z]$ nicht alle Signalspalten erforderlich sind, also wenn Einträge der Kombinationsmatrix $\Omega_{p_{\min}}$ (vgl. Gleichung (4.27)) null sind, liegen nicht für alle Parameter eines kompletten ARX-Modells entsprechend Gleichung (2.11) in $[\Theta]$ Spalten vor. Diese Parameter ohne zugehörige Spalte sind nicht zur Beschreibung des Systemverhaltens erforderlich (vgl. Abschnitt 4.3.3) und können zu null gesetzt werden. Bei der Parameteridentifikation wird daher mit den vorhandenen Signalspalten der Datenmatrix $[Z]$ eine reduzierte Parametermatrix $[\check{\Theta}]$ anhand des IGS

$$[Z][\check{\Theta}] = [O] \quad (5.5)$$

mit der Matrix

$$[O] = \begin{pmatrix} [y_1(n_{\text{ARX}} + 1)] & [y_1(n_{\text{ARX}} + 2)] & \dots & [y_1(N)] \\ [y_2(n_{\text{ARX}} + 1)] & [y_2(n_{\text{ARX}} + 2)] & \dots & [y_2(N)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [y_{n_y}(n_{\text{ARX}} + 1)] & [y_{n_y}(n_{\text{ARX}} + 2)] & \dots & [y_{n_y}(N)] \end{pmatrix}^T \quad (5.6)$$

der Ausgangssignale $[y_1]$ bis $[y_{n_y}]$ identifiziert. Der Aufbau von $[\check{\Theta}]$ wird dabei direkt durch die Einträge in der Kombinationsmatrix $\Omega_{p_{\min}}$ festgelegt. Dadurch verringert sich die Anzahl der zu bestimmenden Parameter in $[\check{\Theta}]$ gegenüber $[\Theta]$, was durch die Reduktion der Freiheitsgrade im Modell in der Regel auch zu engeren Parametereinschlüssen führt.

Nach der Parameteridentifikation erfolgt dann ein weiterer Schritt, in dem die identifizierte, reduzierte Parametermatrix $[\check{\Theta}]$ durch Nullzeilen zur kompletten Parametermatrix $[\Theta]$ ergänzt wird. Welche Zeilen zu Null gesetzt werden ist durch die Nulleinträge in $\Omega_{p_{\min}}$ festgelegt. Dadurch wird die Aufteilung von $[\check{\Theta}]$ in die Matrizen $[A_i]$ und $[B_i]$ des kompletten Modells (2.11) ermöglicht.

Erweiterung der Parameteridentifikation mit Zonotopen

In Abschnitt 3.2.5 wurde ein Verfahren zur Parameteridentifikation vorgestellt, bei dem die Parametermenge durch Zonotope eingeschlossen wird. Um das Verfahren für

den EIV-Fall (Errors-In-Variables) zu erweitern, also für den Fall dass der Regressor ebenfalls eine beschränkte Unsicherheit aufweist, wird im Folgenden die in [GS92] für Ellipsoide beschriebene zweistufige Vorgehensweise (vgl. Abschnitt 3.2.4) auf das Verfahren aus [BAC06] übertragen, da bisher keine Parameteridentifikation mit Zonotopen im EIV-Fall möglich ist.

Den Ausgangspunkt des Verfahrens bildet ein SISO-ARX-System in der Form

$$\hat{y}(k) = \Phi_k^T \vartheta + \nu_k, \quad (5.7)$$

was dem Gleichungssystem (2.9) entspricht. Dieses System wird von der beschränkten Störung ν_k mit

$$\underline{\gamma}_k \leq \nu_k \leq \bar{\gamma}_k \quad (5.8)$$

überlagert. Im EIV-Fall muss anstatt des Regressors Φ_k der durch Unsicherheiten überlagerte Regressor $[\Phi_k] = [\Phi_{k,m}, \Phi_{k,\Delta}]$ beachtet werden. Durch Multiplikation des Regressors mit den (unbekannten) Parametern in Gleichung (5.7) wirkt sich diese Unsicherheit direkt auf den Ausgang \hat{y} aus.

Die Vorgehensweise in [GS92] (vgl. Abschnitt 3.2.4) für Ellipsoide schlägt daher zunächst die Bildung einer modifizierten Gesamtunsicherheit \tilde{e}_k vor, die diese durch den Regressor bedingte Unsicherheit des Ausgangs enthält und anstatt der Unsicherheit ν_k zur Identifikation eingesetzt wird. Diese Gesamtunsicherheit \tilde{e}_k wird dabei in jedem Abtastschritt neu bestimmt, da sie von der aktuellen Schätzung der Parametermenge im rekursiven Verfahren abhängt.

Im ersten Schritt des neuen Verfahrens zur Identifikation mit Zonotopen wird diese Grundidee vom Ellipsoidverfahren übernommen. Um einen Einschluss des absoluten Fehlers \tilde{e}_k zu bestimmen, wird die bekannte Unsicherheit des Regressors $[\Phi_k]$ im k -ten Abtastschritt als Intervallvektor

$$[\xi_k] = [\mathbf{0}, \Phi_{k,\Delta}] \quad (5.9)$$

mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Intervallradius $\Phi_{k,\Delta}$ betrachtet. Dieser Intervallvektor wird nun mit dem Parameter-Zonotop \mathcal{Z}_k aus dem vorherigen Schritt zu

$$\mathcal{Z}_{\xi_k} = [\xi_k] \mathcal{Z}_k \quad (5.10)$$

multipliziert, eine Vorgehensweise dazu ist in Abschnitt 2.2.2 beschrieben. Das Ergebnis dieser Multiplikation liefert den Beitrag zum Gesamtfehler \tilde{e}_k in Form eines eindimensionalen Zonotops, welches zur weiteren Verarbeitung von der *G-Repräsentation* (vgl. Gleichung (2.43)) in die Notation als Intervall umgeformt wird. Dadurch ergibt

sich der gesuchte Gesamtfehler zu

$$\tilde{e}_k = \nu_k + [Z_{\xi_k}]. \quad (5.11)$$

Anschließend wird im zweiten Schritt des Verfahrens mit dieser Gesamtunsicherheit \tilde{e}_k anstatt von ν_k in Gleichung (5.7) das Verfahren nach [BAC06] (vgl. Abschnitt 3.2.5 und Anhang B.2) ausgeführt, wobei wie beim Ellipsoid-Verfahren eine iterative Verbesserung möglich ist. Im Unterschied zu der Vorgehensweise in [GS92] ist bei dem hier vorgeschlagenen Verfahren durch die direkte Intervallmultiplikation (5.10) keine individuelle Betrachtung der 2^ℓ Eckpunkte von $[\xi_k]$ erforderlich. Durch die hier vorgeschlagene neue Vorgehensweise ist somit eine Identifikation von Parameterzonotopen im EIV-Fall möglich.

Rekursives IGS-Verfahren

Im Folgenden wird ein angepasstes Verfahren mit Intervallen zur Beschreibung der Parametermenge vorgestellt. Bei den auf Intervall-Gleichungssystemen basierenden Verfahren, die in Abschnitt 3.2.1 beschrieben wurden, wird das überbestimmte IGS als Ganzes mit entsprechendem Speicheraufwand gelöst, was für die Anwendung zur Parameteridentifikation nicht erforderlich ist. Daher wird im Folgenden eine andere Vorgehensweise zur Lösung der Parameteridentifikation mittels überbestimmtem IGS eingesetzt, welche vorab in [ZBD14c] publiziert wurde. Für die Bestimmung des strikten Lösungseinschlusses nach Gleichung (3.11) kann das überbestimmte IGS in eine Folge quadratischer Gleichungssysteme aufgeteilt werden. Diese IGS der Dimension $\ell \times \ell$ werden individuell mit den in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Verfahren gelöst, wobei auch die beschriebenen Verfahren für überbestimmte IGS für den quadratischen Fall angewandt werden können.

Für die Bestimmung des strikten Lösungseinschlusses gemäß Gleichung (3.11) müssen alle Messdatenpaare durch die gesuchten Parametern bedingt sein. Bei der Aufteilung des überbestimmten IGS muss diese Anforderung für alle quadratischen Gleichungssysteme ebenfalls erfüllt sein, was durch die Bestimmung der Lösungsmenge mit den vorgestellten Verfahren gemäß Gleichung (3.5) gegeben ist. Die Lösungsmenge des überbestimmten IGS wird somit als Schnittmenge der Lösungen aller individuellen quadratischen IGS bestimmt.

Zur Lösung der quadratischen Gleichungssysteme können die in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Verfahren eingesetzt werden, wobei diese je nach Eigenschaften des IGS unterschiedlich genaue Lösungseinschlüsse bestimmen. Zudem ist es möglich, dass einzelne der Verfahren für ein bestimmtes IGS nur eine unbeschränkte Lösungsmenge

erkennen, andere jedoch einen begrenzten Einschluss bestimmen können (vgl. [HH13]). Aus diesem Grund wird in dem hier vorgestellten Verfahren für jedes quadratische IGS eine Kombination mehrerer Lösungsverfahren aus Abschnitt 3.2.1 eingesetzt. Zunächst wird mittels *verifylss* eine Lösung gesucht, da dieses Verfahren in den meisten Fällen sehr schnell einen genauen Lösungseinschluss bestimmt. Falls dies nicht erfolgreich ist, werden nacheinander mit dem *Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren*, der *Rohn-Methode* und dem *Popova-Verfahren* ein Lösungseinschluss gesucht, bis dies gelingt. Wenn jedoch keines der Verfahren eine Lösung liefert, wird das quadratische IGS und somit auch das überbestimmte IGS als nicht lösbar betrachtet. Eine Beschreibung der einzelnen Verfahren ist in Abschnitt 3.2.1 angegeben.

Zur Initialisierung des Verfahrens wird zu Beginn mittels der *Rohn-Methode* eine Lösung für das überbestimmte IGS bestimmt, sofern dies nicht gelingt wird stattdessen ein Intervall mit großer Intervallbreite eingesetzt, um die Lösung sicher einzuschließen. Grundsätzlich ist es möglich, zu jedem Zeitpunkt mit einigen oder allen der beschriebenen Verfahren für jedes IGS nach einer Lösung zu suchen und die Gesamtlösung für das IGS als Schnittmenge aller Lösungen zu bestimmen. Dies wird jedoch aufgrund des großen Rechenaufwands und der geringen erzielbaren Verbesserung in dieser Arbeit nicht genutzt.

Bei der Aufteilung des überbestimmten IGS entstehen mindestens

$$\left\lfloor \frac{m}{\ell} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{\ell} - \left\lfloor \frac{m}{\ell} \right\rfloor \right\rceil \quad (5.12)$$

quadratische Gleichungssysteme, um alle verfügbaren Messdaten zu berücksichtigen. Dabei bedeutet $\lfloor \cdot \rfloor$ eine Abrundung zur nächsten ganzen Zahl, $\lceil \cdot \rceil$ entsprechend die Aufrundung. Weiterhin entspricht m der Anzahl vorhandener Gleichungen und ℓ der Anzahl zu bestimmender Parameter. Durch den zweiten Term in Gleichung (5.12) wird der Fall behandelt, dass sich bei der Aufteilung der m Gleichungen am Ende kein IGS mit ℓ ungenutzten Gleichungen aufstellen lässt und stattdessen einzelne Gleichungen doppelt verwendet werden. Diese Mindestanzahl an Gleichungssystemen sollte, sofern die dadurch größere Rechenzeit noch handhabbar ist, erhöht werden, um die Genauigkeit des Lösungseinschlusses zu verbessern. Durch die mehrfache Verwendung einzelner oder aller m Gleichungen in unterschiedlichen Gleichungssystemen werden mehr verschiedene IGS aufgestellt, welche mit den eingesetzten Verfahren zu unterschiedlichen Lösungseinschlüssen führen. Insbesondere bei kleinen Datensatzlängen führt dies zu einer Verkleinerung des Lösungseinschlusses. Wenn beim Aufstellen der quadratischen IGS beispielsweise jeweils die zeitlich älteste Gleichung durch eine neue Gleichung ersetzt wird, ergeben sich $m - \ell + 1$ Gleichungssysteme. Dabei sollte in jedem Schritt des Verfahrens direkt die Schnittmenge mit der bisherigen Lösung gebildet werden um den Speicherbedarf des Verfahrens zu reduzieren, anstatt alle individuellen Lösungsmengen erst am Ende des Verfahrens zu schneiden. Diese

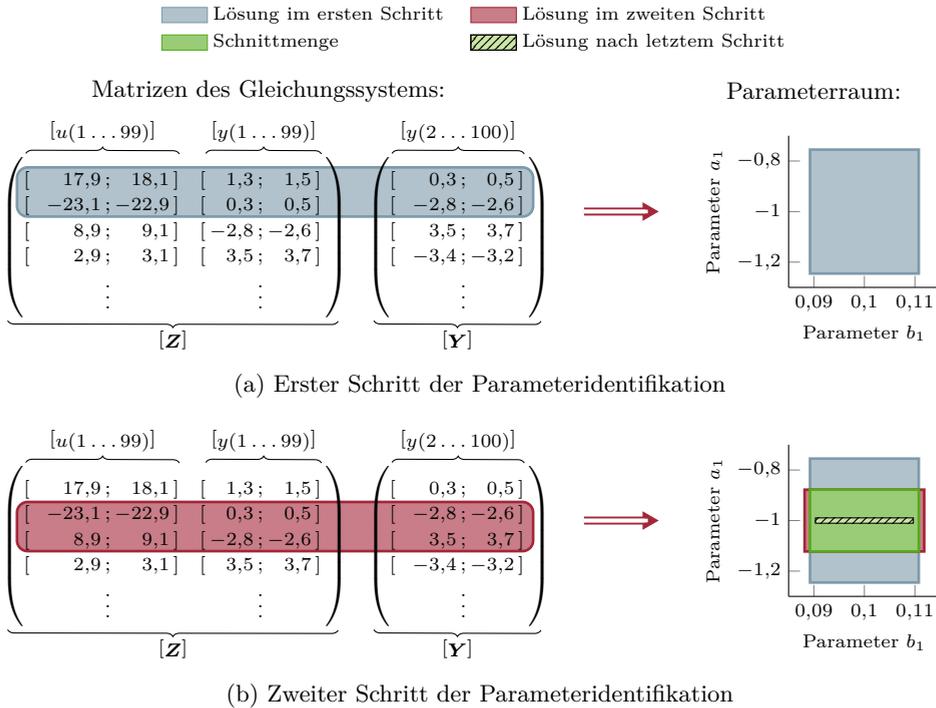


Abbildung 5.2: Rekursive Parameteridentifikation für ein SISO-ARX-Modell erster Ordnung

Vorgehensweise kann als rekursives¹¹ Parameteridentifikationsverfahren betrachtet werden, da ein initialer Lösungseinschluss durch das Hinzufügen weiterer Messdaten nach und nach verbessert wird.

In Abbildung 5.2 wird die Vorgehensweise anhand eines einfachen Beispiels mit $N = 100$ Datenpunkten verdeutlicht. Dazu wird eine Datenmatrix $[Z]$ mit zwei Spalten und 99 Zeilen eines SISO-ARX-Modells erster Ordnung betrachtet. Im ersten Schritt des Verfahrens, dargestellt in Abbildung 5.2(a), werden die ersten beiden Zeilen der Matrix $[Z]$ zusammen mit den ersten beiden Werten aus $[Y]$ zum Aufstellen eines quadratischen Gleichungssystems genutzt. Die Parametermenge nach Lösung dieses Gleichungssystems ist im rechten Teil der Abbildung als blaue Box dargestellt. Der zweite Schritt des Verfahrens betrachtet die Zeilen zwei und drei des Gleichungssystems und ist in Abbildung 5.2(b) dargestellt. Die Lösung, dargestellt als rote Box im rechten Teil der Abbildung, wird mit der Parametermenge aus dem

¹¹Wird in dieser Arbeit, wie in der Literatur üblich für ähnliche Verfahren (z. B. RLS), als rekursives Verfahren bezeichnet, obwohl es sich um ein iteratives Verfahren handelt.

vorherigen Schritt geschnitten. Diese Schnittmenge, dargestellt als grüne Box, wird als Parametermenge nach dem zweiten Schritt weiter genutzt. Diese Vorgehensweise wiederholt sich für alle Zeilen der Matrizen des Gleichungssystems. Das Ergebnis nach dem letzten Schritt des Verfahrens und somit des gesamten Gleichungssystems ist zusätzlich als schwarzes Rechteck eingezeichnet.

5.1.3 Simulationsbeispiele zur Identifikation

Die soeben beschriebene Kombination von Ordnungsbestimmung und Parameteridentifikation wird im folgenden Abschnitt anhand von Simulationsbeispielen verdeutlicht. Dazu werden erneut die in Kapitel 4 vorgestellten Systeme eingesetzt. Die dabei verwendeten Simulationseinstellungen sind in Anhang D.1 kompakt dargestellt. Durch die Beispiele werden die wesentlichen Eigenschaften der Black-Box-Identifikation demonstriert. Ein Schwerpunkt wird dabei auf den Einsatz unterschiedlicher Parameteridentifikationsverfahren gelegt, um die unterschiedlichen Einsatzmöglichkeiten der Ordnungsbestimmung zu verdeutlichen. In Abschnitt 5.2.2 werden die Identifikationsergebnisse aus diesem Abschnitt erneut aufgegriffen und zur Fehlerdetektion eingesetzt. Sämtliche Simulationen werden auf einem handelsüblichen Desktop-PC mit Windows 7 64 bit, MATLAB Release R2014a sowie INTLAB [Rum99] in Version 7.1 durchgeführt.

Beispiel des MISO-Systems

Als erstes Beispiel wird das MISO-System aus den Abschnitten 4.1.3 und 4.2.3 betrachtet. Wie dort beschrieben, wird das System dritter Ordnung mit einer Ausgangsgröße und zwei Eingangsgrößen für 1000 Abtastpunkte simuliert und die Daten mittels gleichverteilter Fehlern u_Δ bzw. y_Δ überlagert. Die Schranken der Fehler werden wie auch die Intervallradien zum Einschluss der Daten entsprechend 1% der jeweiligen maximalen Signalamplitude zu $u_\Delta = 0,035$ bzw. $y_\Delta = 0,159$ festgelegt. Zur Sicherstellung einer ausreichenden Anregung des Systems wird für jeden Eingang eine Folge normalverteilter Werte mit Varianz $\sigma^2 = 1$ genutzt, welche zur besseren Darstellbarkeit in Abbildung 4.1 auf ganze Zahlen gerundet werden. Im Folgenden wird zunächst das System ohne Durchgriff betrachtet.

Die Ordnungsbestimmung liefert, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, die korrekte Systemordnung $n_{\text{ARX}} = 3$, welche anschließend zur Parameteridentifikation genutzt wird. Hierzu wird das in Abschnitt 5.1.2 beschriebene rekursive IGS-Verfahren eingesetzt. Als Ergebnis liefert das Verfahren den Parametervektor $[\vartheta]$, welcher in

die Parameter bzw. Parametervektoren

$$[a_1] = [-1,12; -0,88], [a_2] = [-1,12; -0,89], [a_3] = [-1,13; -0,87], \quad (5.13a)$$

$$[b_1] = ([-0,52; 0,75] [-0,76; 0,52]), \quad (5.13b)$$

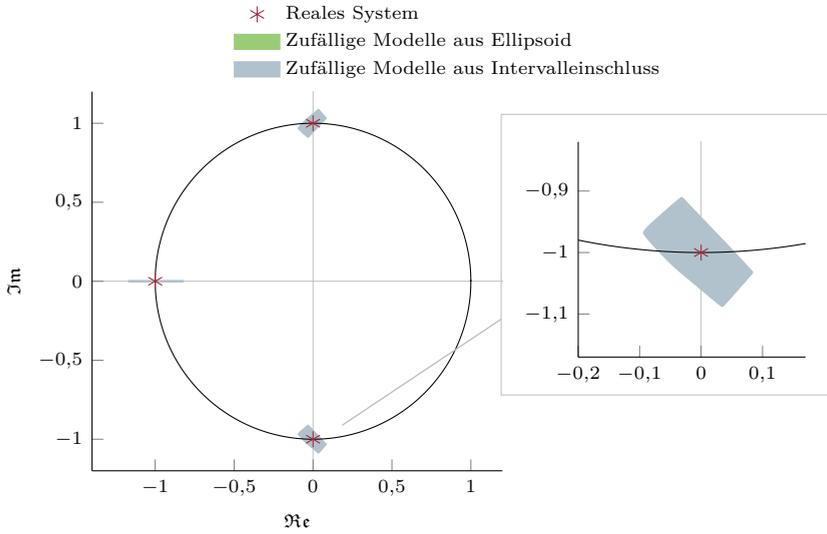
$$[b_2] = ([-0,73; 0,53] [-0,35; 0,68]), \quad (5.13c)$$

$$[b_3] = ([-0,31; 0,89] [-0,73; 0,31]) \quad (5.13d)$$

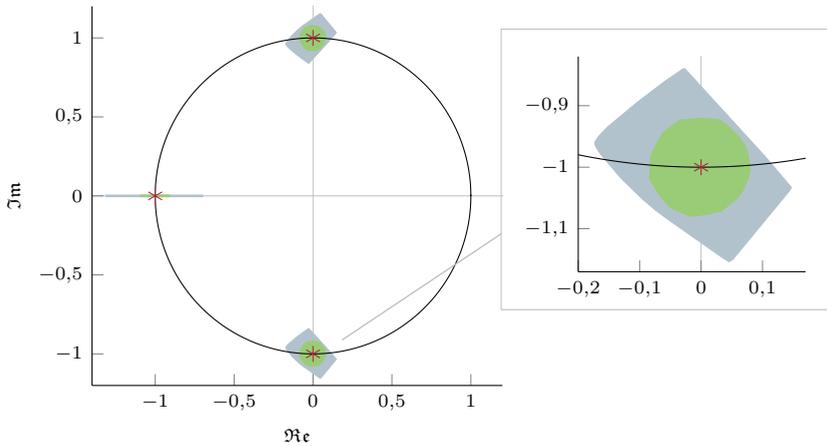
des Modells (2.10) aufgeteilt werden kann. Da die Parameter des simulierten Systems (4.9) hierin enthalten sind, handelt es sich um ein korrektes Modell für das betrachtete System. Zur besseren Vergleichbarkeit des Ergebnisses wird das im Parameterraum vom Parametervektor $[\vartheta]$ umschlossene Volumen $V_{\vartheta} = 0,036$ genutzt.

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 5.3(a) die Lage der Systempole dieses Beispiels abgebildet. Dabei sind die Pole des simulierten (wahren) Systems als roter Stern gekennzeichnet. Um die Pole des Intervallmodells zu verdeutlichen, wird eine *Monte-Carlo-Simulation* genutzt. Dabei werden für jeden Parameter 100 000 zufällige Werte aus dem Parameterintervall gezogen und für jedes so gewonnene Modell die Lage der Pole berechnet. Die Berechnung der Pole geschieht durch Transformation des Systems in seine Zustandsraumdarstellung (vgl. Abschnitt 2.1.3) und anschließende Berechnung der Eigenwerte der Systemmatrix. Die genutzten Algorithmen im Zustandsraum ermöglichen dabei eine schnellere Berechnung für die große Anzahl Modelle bei der Monte-Carlo-Simulation als die ebenfalls mögliche Berechnung anhand der Parameter des ARX-Modells. In Abbildung 5.3(a) ist die konvexe Hülle aller so ermittelten Pole in blau dargestellt. In der Abbildung und insbesondere in der vergrößerten Darstellung rechts ist erkennbar, dass durch das Intervallmodell eine Gruppe von Systemen mit ähnlichem Verhalten wie das zu identifizierende System beschrieben wird. Die Betrachtung von Signalverläufen ist wegen der im identifizierten Modell enthaltenen instabilen Anteile hier nicht sinnvoll.

Als Alternative zum rekursiven IGS-Verfahren wird für dieses Beispielsystem die Parameteridentifikation mittels Ellipsoiden demonstriert. Dazu wird das in Abschnitt 3.2.4 beschriebene MOVE-Verfahren mit der ebenfalls dort beschriebenen EIV-Erweiterung genutzt. Das Ergebnis der Parameteridentifikation stellt ein neundimensionales Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{c}, \mathbf{P})$ mit Volumen $V_{\mathcal{E}} = 0,006$ im Parameterraum dar. Die Parameter \mathbf{c} und \mathbf{P} sind in Anhang D.2 angegeben. Im Vergleich zum vorherigen Ergebnis bei der rekursiven Intervallidentifikation stellt der Parametereinschluss durch das Ellipsoid einen engeren Einschluss dar. Dieser Vorteil ist allerdings nur von Bedeutung, wenn für die Anwendung die Parameter in Form eines Ellipsoids genutzt werden können. Wenn stattdessen ein Einschluss des Ellipsoids durch einen Intervallvektor genutzt wird, erhöht sich das Volumen für diesen auf $V_{\vartheta, \mathcal{E}} = 1,90$ und ist somit deutlich größer als beim rekursiven IGS-Verfahren.



(a) Ergebnis der Parameteridentifikation mittels Intervall-Gleichungssystem



(b) Ergebnis der Parameteridentifikation mittels Ellipsoiden

Abbildung 5.3: Lage der Pole des MISO-Systems bei unterschiedlichen Verfahren zur Parameteridentifikation

In Abbildung 5.3(b) ist dies grafisch anhand der Pole des identifizierten Systems dargestellt. Im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation werden dazu 100 000 zufällige Parametervektoren aus dem identifizierten Ellipsoid gezogen. Die konvexe Hülle um die Pole dieser zufälligen Systeme ist als grüne Fläche in der Abbildung dargestellt. Zusätzlich ist für den Einschluss des Ellipsoids in einem Intervallvektor ebenfalls das Ergebnis einer Monte-Carlo-Simulation als blaue Fläche eingezeichnet. Im Vergleich mit Abbildung 5.3(a) zeigt sich, dass es sinnvoll ist, die Ordnungsbestimmung je nach geplanter Nutzung des Modells mit unterschiedlichen Parameteridentifikationsverfahren zu kombinieren, um die Notwendigkeit eines nachträglichen Einschluss der Parameter durch andere Unsicherheitsbeschreibungen zu vermeiden.

Sofern kein Wissen vorliegt, ob im System ein Durchgriff vorhanden ist, sollte dieser für die Identifikation angenommen werden. Am Ergebnis der Ordnungsbestimmung ändert sich dadurch, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, auch in diesem Beispiel nichts. Durch den zusätzlich im Modell vorhandenen Freiheitsgrad erhöht sich jedoch die Unsicherheit der identifizierten Parameter, was durch das mittels rekursivem IGS-Verfahren eingeschlossenen Volumen von $V_{\vartheta} = 0,183$ im Parameterraum deutlich wird.

Wenn dem System, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, ein Durchgriff hinzugefügt wird, verläuft die Black-Box-Identifikation ebenfalls erfolgreich, sofern der Durchgriff bei der Identifikation mit berücksichtigt wird. Wird dieser stattdessen ignoriert, führt dies in diesem Beispiel bei der Ordnungsbestimmung nicht zu Problemen (vgl. Abschnitt 4.2.3). Allerdings schlägt die Parameteridentifikation fehl, da es nicht gelingt, ein Modell zu finden, welches bei Ordnung $n_{\text{ARX}} = 3$ ohne Durchgriff die Daten erklären kann. Somit kann in diesem Beispiel die fehlerhafte Annahme anhand der fehlgeschlagenen Parameteridentifikation erkannt werden.

Beispiel des MIMO-Systems erster Ordnung

Als nächstes Beispiel wird das erste MIMO-System aus Abschnitt 4.3.2 bzw. 4.3.4 betrachtet. Die simulierten Signalverläufe dieses Systems erster Ordnung mit zwei Ausgängen und zwei Eingängen werden wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben durch einen gleichverteilten Fehler mit 1% der jeweiligen maximalen Signalamplitude überlagert. Durch diese Unsicherheit wird gleichzeitig der Radius der Intervalle für die Signalverläufe zu $u_{1,\Delta} = 0,036$, $u_{2,\Delta} = 0,033$, $y_{1,\Delta} = 0,065$ bzw. $y_{2,\Delta} = 0,085$ festgelegt, um den Einschluss sicherzustellen.

Mit diesen Daten wird, wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, die minimale Ordnung des ARX-Modells zu $n_{\text{ARX}} = 1$ bestimmt. Die anschließende Parameteridentifikation wird in diesem Beispiel mit dem Zonotop-Verfahren aus Abschnitt 5.1.2 durchge-

führt. Da es sich um ein MIMO-System handelt, das Zonotop-Verfahren jedoch nur Parametervektoren (MISO) anstatt Parametermatrizen einschließen kann, wird für jeden Ausgang ein individuelles Parameterzonotop identifiziert. Die Parameter der identifizierten Zonotope sind in Anhang D.3 angegeben. Das Volumen dieser beiden Zonotope im Parameterraum beträgt $V_{\mathcal{Z}_1} = 3,2 \times 10^{-5}$ bzw. $V_{\mathcal{Z}_2} = 1,4 \times 10^{-4}$.

Auch für die durch die Zonotope beschriebene Parametermenge kann ein Intervalleinschluss $[\Theta]$ bestimmt werden, welcher gemäß

$$(\mathcal{Z}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{H}_1) \quad \mathcal{Z}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{H}_2)) \subseteq [\Theta] \quad (5.14)$$

die komplette Parametermatrix des Systems einschließt. Das im Parameterraum durch die Spalten dieser Intervallmatrix eingeschlossene Volumen erhöht sich dadurch auf $V_{\Theta, \mathcal{Z}_1} = 3,0 \times 10^{-4}$ bzw. $V_{\Theta, \mathcal{Z}_2} = 1,8 \times 10^{-3}$. Die Umformung der so gebildeten Parametermatrix in Form der ARX-Systemdarstellung (2.11) liefert die Parametermatrizen

$$[\mathbf{A}] = \left(\begin{array}{l} [\quad 0,76; \quad 0,84] [-0,05; \quad 0,03] \\ [\quad 0,80; \quad 1,03] [-0,57; -0,43] \end{array} \right), \quad (5.15a)$$

$$[\mathbf{B}] = \left(\begin{array}{l} [\quad 0,91; \quad 1,09] [-0,63; -0,36] \\ [-0,10; \quad 0,10] [\quad 1,86; \quad 2,14] \end{array} \right), \quad (5.15b)$$

welche einen Einschluss der Parameter des simulierten Modells (4.19) darstellen.

In Abbildung 5.4 wird dies nochmals anhand einer Monte-Carlo-Simulation verdeutlicht. Wie im vorherigen Beispiel ist im Bild die Lage der Pole des simulierten Systems gekennzeichnet, ebenso wie der Bereich der 100 000 zufällig aus der Parametermenge des Zonotops bzw. des Intervalleinschlusses ausgewählten Modelle. Auch hier geschieht die Bestimmung der Pole anhand der Eigenwerte der Systemmatrix des transformierten Systems. Durch die Parametermengen des identifizierten Modelles wird somit auch im MIMO-Fall eine Gruppe von Systemen mit ähnlicher Systemdynamik beschrieben. Wie sich dies auf das am Ausgang messbare Systemverhalten auswirkt, ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der beiden simulierten Systemausgänge als rote Linie. Zusätzlich ist die Einhüllende der Signalverläufe aller bei der Monte-Carlo-Simulation betrachteten 100 000 zufälligen Modellen eingezeichnet. Innerhalb der grünen Fläche liegen dabei die Signalverläufe der Modelle mit aus den Zonotopen ausgewählten Parametern. Die größere blaue Fläche, welche auch die grüne Fläche beinhaltet, deckt den Bereich der durch den Intervalleinschluss beschriebenen Modelle ab. Alle Modelle sind dabei zu Beginn mit den selben Werten initialisiert um die Auswirkung der unterschiedlichen Parameter zu verdeutlichen. Anhand der Abbildung wird ebenfalls deutlich, dass das identifizierte Modell das Systemverhalten beschreibt.

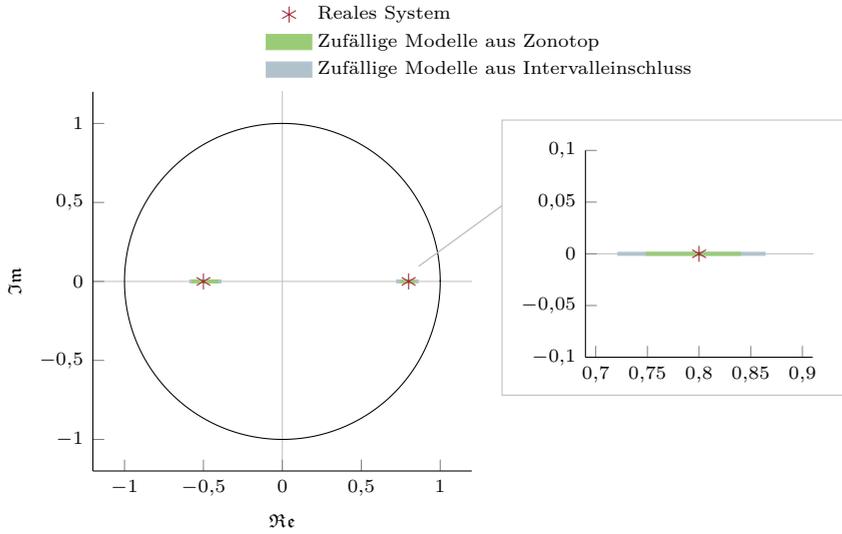


Abbildung 5.4: Lage der Pole des ersten MIMO-Systems bei Parameteridentifikation mittels Zonotopen

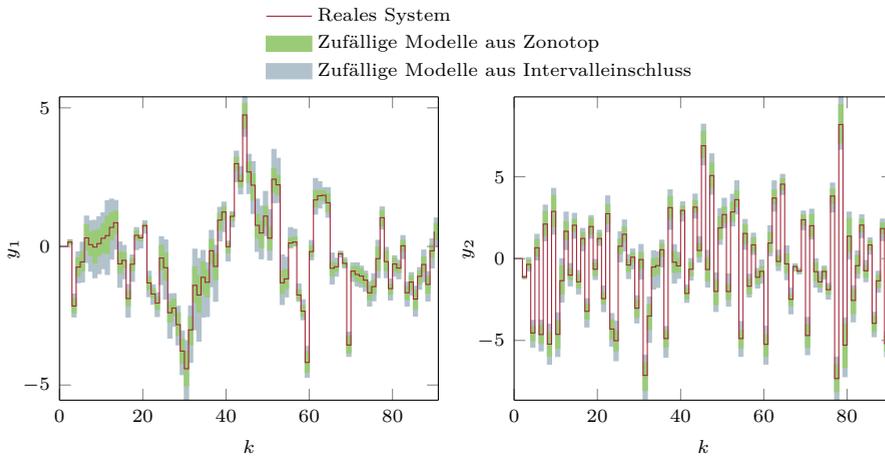


Abbildung 5.5: Ausschnitt des Signalverlaufs des ersten MIMO-Systems bei Parameteridentifikation mittels Zonotopen

Beispiel des MIMO-Systems zweiter Ordnung

Auch beim komplexeren zweiten Beispielsystem aus den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.4 ändert sich an der Vorgehensweise nichts. Dieses Beispielsystem wird daher hier genutzt, um die Auswirkung unterschiedlich großer Intervalle der zur Simulationen genutzten Daten zu demonstrieren. Das MIMO-ARX-System zweiter Ordnung mit den Parametermatrizen in Gleichung (4.22) hat zwei Ausgänge, drei Eingänge und enthält einen Durchgriff. Für dieses Beispiel werden 1000 Datenpunkte mit einer Unsicherheit von 1% der jeweiligen maximalen Signalamplitude erzeugt und zur Identifikation genutzt. Die Schranken der Fehler und die Intervallradien entsprechen somit $u_{1,\Delta} = 3,2 \times 10^{-3}$, $u_{2,\Delta} = 3,4 \times 10^{-3}$ bzw. $u_{3,\Delta} = 3,4 \times 10^{-3}$ für die drei Eingangssignale und $y_{1,\Delta} = 6,6 \times 10^{-3}$ bzw. $y_{2,\Delta} = 12,0 \times 10^{-3}$ für die beiden Ausgänge. Die Ordnungsbestimmung liefert, wie in Abschnitt 4.3.4 beschrieben, die minimale Ordnung $n_{\text{ARX}} = 2$ mit der Kombinationsmatrix

$$\mathbf{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Die Parameteridentifikation wird nun mit dem rekursiven IGS-Verfahren aus Abschnitt 5.1.2 ausgeführt. Da in der Kombinationsmatrix ein Nullelement enthalten ist, wird bei der vorgestellten Methode zur Black-Box-Identifikation lediglich eine reduzierte Parametermatrix $[\check{\Theta}]$ mit zwölf Zeilen identifiziert, welche durch eine reellwertige Nullzeile zur kompletten Parametermatrix $[\Theta]$ ergänzt wird. Dadurch können die Parameter in Form der Modellgleichung (2.11) als

$$[\mathbf{A}_1] = \left(\begin{array}{cc|cc} [& 0,78; & 0,82] & [-0,01; & 0,01] \\ [-0,03; & 0,02] & [& 0,49; & 0,51] \end{array} \right), \quad (5.17a)$$

$$[\mathbf{A}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} [-0,52; -0,48] & 0 & & \\ [& 0,98; & 1,02] & 0 \end{array} \right), \quad (5.17b)$$

$$[\mathbf{B}_0] = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} [-0,02; & 0,02] & [& 0,98; & 1,02] & [-0,02; & 0,02] \\ [-0,03; & 0,03] & [-0,03; & 0,03] & [& 0,27; & 0,33] \end{array} \right), \quad (5.17c)$$

$$[\mathbf{B}_1] = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} [-1,02; -0,98] & [-1,03; -0,97] & [-0,02; & 0,02] \\ [-2,03; -1,97] & [& 0,96; & 1,04] & [-0,03; & 0,03] \end{array} \right), \quad (5.17d)$$

$$[\mathbf{B}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} [-0,04; & 0,04] & [-0,03; & 0,03] & [& 0,98; & 1,02] \\ [& 0,94; & 1,06] & [-0,04; & 0,04] & [-0,03; & 0,03] \end{array} \right) \quad (5.17e)$$

angegeben werden. Diese schließen die Parameter des simulierten Systems (4.22) ein. Durch die Ergänzung des reduzierten Parametervektors der Identifikation zum kompletten Modell werden in der Matrix $[\mathbf{A}_2]$ die beiden reellwertigen Nullen eingefügt.

Die komplette Identifikation wird zusätzlich mit einer erhöhten Unsicherheit von 3% der maximalen Signalamplitude wiederholt. Die Amplitude der überlagerten gleichverteilten Störungen beträgt ebenso wie die daraus resultierenden Intervallbreiten $u_{1,\Delta} = 9,7 \times 10^{-3}$, $u_{2,\Delta} = 10,3 \times 10^{-3}$, $u_{3,\Delta} = 10,1 \times 10^{-3}$, $y_{1,\Delta} = 19,9 \times 10^{-3}$ bzw. $y_{2,\Delta} = 36,0 \times 10^{-3}$. Auf die Ordnungsbestimmung hat dies keine Auswirkung, da die Anforderungen aus Abschnitt 4.2.2 weiterhin erfüllt sind.

Bei der Parameteridentifikation erhöht sich der mittlere Intervallradius der identifizierten Parameter in $\hat{\Theta}$ dadurch von $\Delta_{m,1\%} = 0,028$ bei 1% Unsicherheit auf $\Delta_{m,3\%} = 0,094$ bei 3% Unsicherheit der Daten. Die resultierenden Parametermatrizen

$$[\mathbf{A}_1] = \left(\begin{array}{cc|cc} [& 0,73; & 0,87] & [-0,03; & 0,03] \\ [-0,09; & 0,09] & [& 0,46; & 0,54] \end{array} \right), \quad (5.18a)$$

$$[\mathbf{A}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc} [-0,56; & -0,44] & & 0 & \\ [& 0,92; & 1,08] & & 0 \end{array} \right), \quad (5.18b)$$

$$[\mathbf{B}_0] = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} [-0,08; & 0,08] & [& 0,92; & 1,08] & [-0,08; & 0,07] \\ [-0,11; & 0,10] & [-0,11; & 0,11] & [& 0,20; & 0,40] \end{array} \right), \quad (5.18c)$$

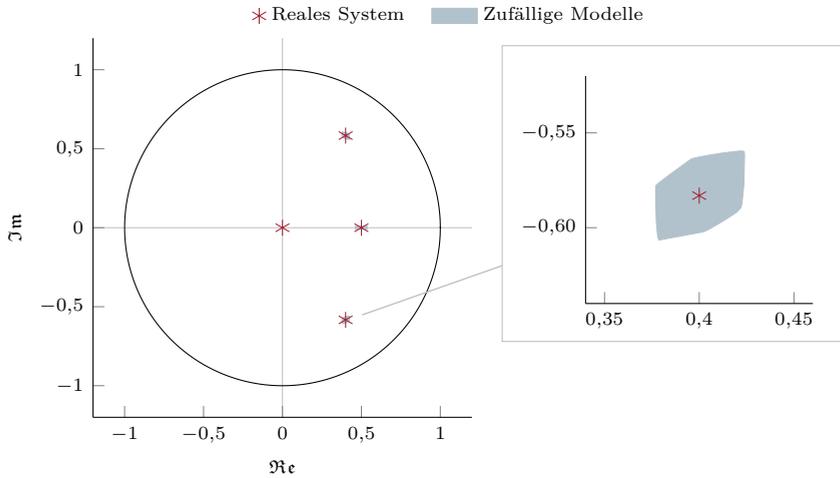
$$[\mathbf{B}_1] = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} [-1,08; & -0,92] & [-1,10; & -0,90] & [-0,08; & 0,07] \\ [-2,11; & -1,90] & [& 0,86; & 1,14] & [-0,10; & 0,10] \end{array} \right), \quad (5.18d)$$

$$[\mathbf{B}_2] = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} [-0,14; & 0,14] & [-0,10; & 0,10] & [& 0,93; & 1,08] \\ [& 0,81; & 1,19] & [-0,13; & 0,13] & [-0,10; & 0,10] \end{array} \right) \quad (5.18e)$$

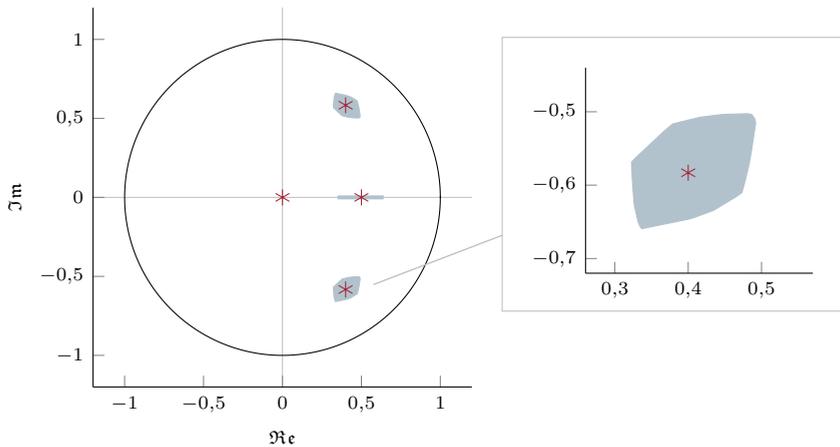
enthalten entsprechend größere Intervalle.

In Abbildung 5.6 ist die Auswirkung dieser größeren Parametermengen auf die Lage der Pole des Systems dargestellt. Für beide Teile der Abbildung wurde, wie bei den vorherigen Beispielen, jeweils eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 000 zufällig aus den Parametern gezogenen Modellen durchgeführt. In beiden Fällen sind die Pole des simulierten Systems in der durch das mengenbasierte Modell beschriebenen Gruppe von Systemen enthalten. In Abbildung 5.6(b) ist jedoch ein deutlich größerer Bereich an Pollagen durch das Modell zu sehen, die zu einer größeren Variation des beinhalteten dynamische Verhaltens führt, was bei der späteren Nutzung des Modells berücksichtigt werden muss.

In Abbildung 5.6 ist in beiden Teilen der Abbildung ein reellwertiger Pol im Ursprung des Koordinatensystems dargestellt, welcher auch bei allen Modellen der Monte-Carlo-Simulation auftritt. Dieser Pol ist aufgrund der Erweiterung der reduzierten Parametermatrix durch reellwertige Nulleinträge vorhanden und ist auch in der zugehörigen Zustandsraumdarstellung enthalten. Diese Zustandsraumdarstellung zur Berechnung der Pole wird entsprechend Abschnitt 2.1.3 aufgestellt. In Anhang D.4 wird ausführlich beschrieben, wie dieser Pol ohne Unsicherheit entsteht.

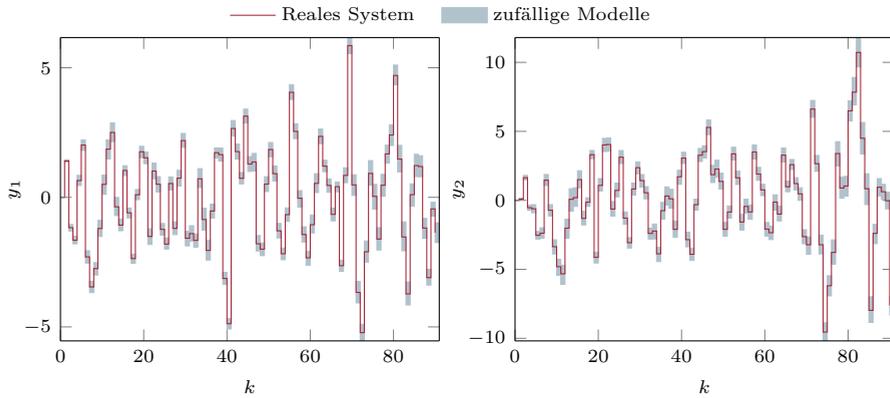


(a) Ergebnis bei einer Unsicherheit von 1‰ der jeweiligen max. Signalamplitude

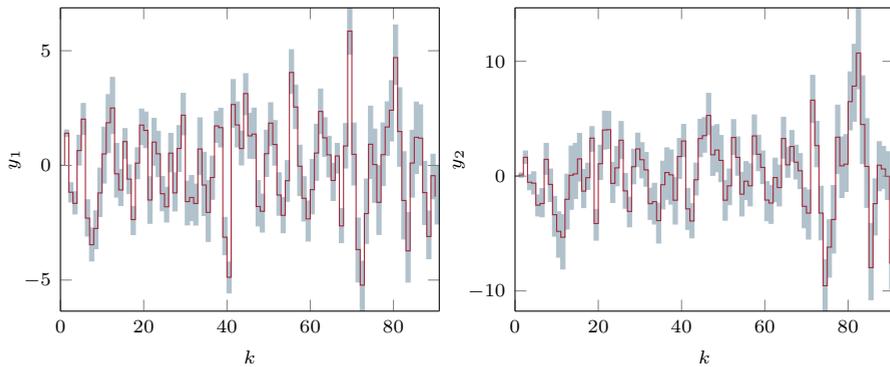


(b) Ergebnis bei einer Unsicherheit von 3‰ der jeweiligen max. Signalamplitude

Abbildung 5.6: Lage der Pole des zweiten MIMO-Systems bei der Parameteridentifikation mittels IGS



(a) Ergebnis bei einer Unsicherheit von 1% der jeweiligen max. Signalamplitude



(b) Ergebnis bei einer Unsicherheit von 3% der jeweiligen max. Signalamplitude

Abbildung 5.7: Ausschnitt des Signalverlaufs des zweiten MIMO-Systems bei der Parameteridentifikation mittels IGS

Für die bei der Monte-Carlo-Simulation verwendeten Modelle ist in Abbildung 5.7 wie im vorherigen Beispiel jeweils der durch die Signalverläufe abgedeckte Bereich dargestellt. Auch hieran wird ersichtlich, dass durch das mit größerer Unsicherheit identifizierte Modell größere Abweichungen vom Verhalten des simulierten Systems auftreten können.

Beispiel des instabilen Systems

Auch für das instabile Beispielsystem aus Abschnitt 4.3.6 wird die Black-Box-Identifikation wie bei den vorherigen Beispielen durchgeführt. In Abschnitt 4.3.6 ist ausführlich beschrieben, welcher stabilisierende Regler eingesetzt wird und wie damit die Daten zur Identifikation erzeugt werden. Die Ordnungsbestimmung liefert die korrekte Systemordnung $n_{\text{ARX}} = 2$. Die Parameteridentifikation wird zunächst mit dem rekursiven IGS-Verfahren aus Abschnitt 5.1.2 durchgeführt. Die identifizierten Parameter haben in diesem Beispiel einen mittleren Intervallradius von $\Delta_m = 0,044$ und sind in Anhang D.5 angegeben.

In Abbildung 5.8(a) ist die Lage der Pole des so identifizierten Modells mittels Monte-Carlo-Simulation dargestellt. Zusätzlich zu den rot dargestellten Polen des instabilen Systems und den diese einschließenden Pole der zufällig gezogenen Modelle (blaue Fläche) sind die Pole des mit dem Regler (4.35) für die Identifikation geregelten Systems in grün dargestellt. Wie im vorherigen Beispiel entsteht durch die Erweiterung der reduzierten Parametermatrix mit reellwertigen Nullen ein zusätzlicher Pol im Ursprung.

Alternativ wird die Parameteridentifikation mittels des in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Verfahrens der linearen Optimierung durchgeführt. Die Parametermatrizen sind in Anhang D.5 zu finden. Der mittlere Intervallradius der Parameter verringert sich bei diesem Verfahren auf $\Delta_m = 0,016$, was auch in Abbildung 5.8(b) deutlich wird. Wie in den anderen Beispielen liegt dieser Abbildung eine Monte-Carlo-Simulation mit 100 000 zufälligen Modellen aus dem identifizierten Modell zugrunde. An beiden Teilen der Abbildung 5.8 zeigt sich, dass durch die Identifikationsmethode auch im geschlossenen Regelkreis ein Modell des instabilen Systems identifiziert werden kann.

Durch die in diesem Abschnitt vorgestellten Simulationsbeispiele wurde die Möglichkeit zur universellen Kombination der in dieser Arbeit vorgestellten Ordnungsbestimmung mit unterschiedlichen Parameteridentifikationsverfahren demonstriert. Dabei kamen sowohl Verfahren aus der Literatur zum Einsatz, als auch die beiden in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren der Identifikation mit Zonotopen und das rekursive IGS-Verfahren. Bei allen Simulationsbeispielen wurde neben der tatsächlichen Systemordnung auch ein Einschluss der Parameter und somit ein gültiges

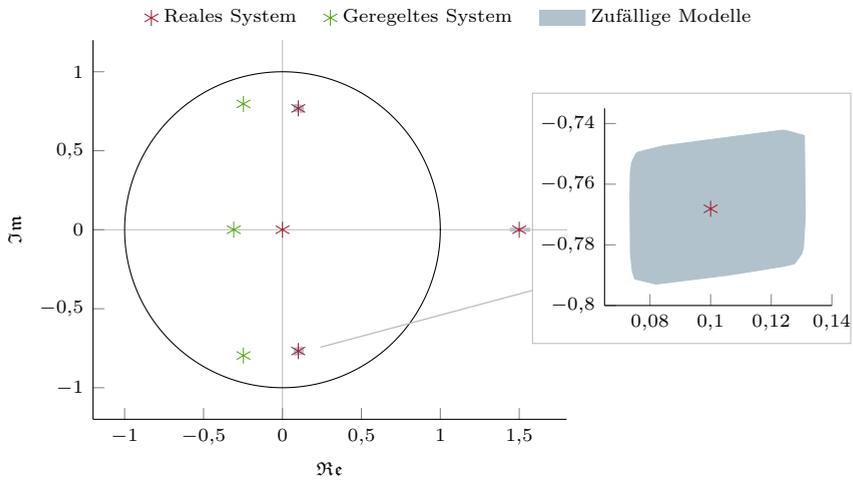
Modell identifiziert. Die Identifikationsergebnisse der betrachteten Beispielsysteme sind sehr gut für die Anwendung zur mengenbasierten Fehlerdetektion geeignet, was im folgenden Abschnitt vorgestellt und in Abschnitt 5.2.2 demonstriert wird.

5.2 Fehlerdetektion mit identifizierten Modellen

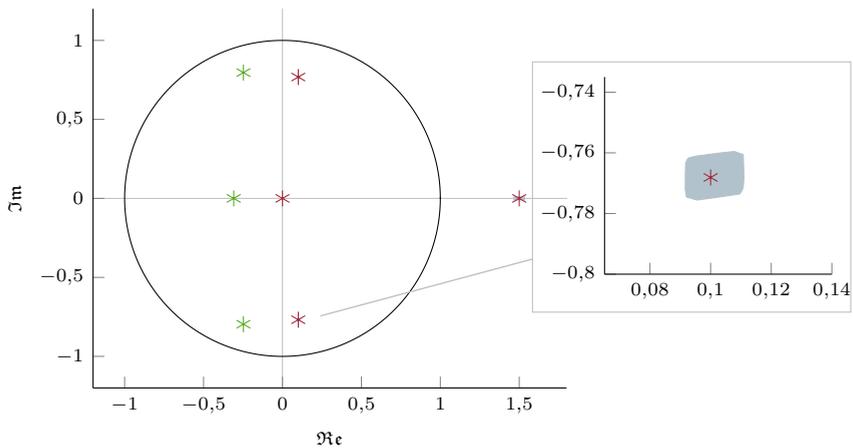
Eine mögliche Anwendung der mittels der Black-Box-Identifikation gewonnenen Modelle stellt die mengenbasierte Fehlerdetektion dar. Die Grundlagen hierzu und einige relevante Ansätze aus der Literatur wurden in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Die Anwendung der dort vorgestellten Ansätze sowie eine mögliche Erweiterung hiervon wird im Folgenden näher betrachtet und anhand von Simulationen demonstriert.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Black-Box-Identifikation liefert als Ergebnis zunächst ein ARX-Modell des Systems. Dies erschwert den Einsatz von Fehlerdetektionsverfahren, welche mit Zustandsraummodellen arbeiten, da durch die Umformung in den Zustandsraum bei MIMO-Systemen im Allgemeinen keine Minimalrealisierung vorliegt (vgl. Abschnitt 2.1.3). Insbesondere bei den direkten Verfahren zur Fehlerdetektion wie der Zustandsmengenbeobachtung oder Verfahren mit Intervall-Beobachtern führt die erhöhte Modellordnung zu einem höherem Rechenaufwand.

Die indirekten Verfahren dagegen können ohne Umformung mit den ARX-Modellen umgehen, da im Verfahren eine Transformation der Messung in den Parameterraum des Modells enthalten ist. Eine einfache Möglichkeit für diese Transformation stellen rekursive Parameteridentifikationsverfahren dar. Dabei wird in jedem Abtastschritt eine neue Messung hinzugefügt und die Schnittmenge aus damit bestimmter Parametermenge und der Parametermenge aus dem vorherigen Abtastschritt gebildet. Wenn diese Schnittmenge leer ist, kann die neue Messung nicht durch die bisherigen Parameter des Systems beschrieben werden, es liegt also ein Fehler vor. Die in dieser Arbeit eingesetzten Verfahren der Parameteridentifikation mittels Ellipsoiden (vgl. Abschnitt 3.2.4), mittels Zonotopen (vgl. Abschnitt 5.1.2) sowie das rekursive IGS-Verfahren (vgl. Abschnitt 5.1.2) können hierfür genutzt werden. Auch eine Nutzung des in Abschnitt 3.2.3 vorgestellten SIVIA-Algorithmus ist denkbar, wird hier jedoch nicht betrachtet.



(a) Ergebnis der Parameteridentifikation mittels Intervall-Gleichungssystem



(b) Ergebnis der Parameteridentifikation mittels linearer Optimierung

Abbildung 5.8: Lage der Pole des instabilen MIMO-Systems im geschlossenen Regelkreis bei 1% Unsicherheit der Daten bezogen auf die jeweilige maximale Signalamplitude

5.2.1 Fehlerdetektion durch ARX-Filter

Als Alternative zu den indirekten Verfahren zur Fehlerdetektion wird im Folgenden ein direktes Verfahren basierend auf ARX-Modellen mit Intervallparametern vorgestellt. Die Grundidee des Verfahrens orientiert sich am Zustandsmengenbeobachter aus [Pla07]. Da das Verfahren eine *Prädiktor-Korrektor*-Struktur analog zum *Kalman-Filter* [Kál60] aufweist, wird es im Folgenden als *ARX-Filter* bezeichnet.

Beim ARX-Filter handelt es sich um ein rekursives Verfahren basierend auf einer *Einschritt-Prädiktion* (engl. one-step-ahead prediction) der Signalverläufe. Die beiden Teile des Verfahrens sind:

1. Prädiktion der Ausgangswerte: In diesem Schritt werden die Ausgangssignale $[\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)]$ für den nächsten Abtastschritt prädiziert. Dazu wird die Modellgleichung des ARX-Modells (2.11) in Kombination mit gefilterten Ausgangswerten aus den vorherigen Abtastschritten genutzt.
2. Korrektur der Ausgangswerte: Hierbei werden die prädizierten Ausgangswerte $[\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)]$ durch die im aktuellen Abtastschritt gemessenen Werte $[\mathbf{y}_{\text{mess}}(k)]$ korrigiert.

In dem Verfahren wird vorausgesetzt, dass sowohl die Parametermengen als auch die Signale durch Intervalle eingeschlossen werden. Dies führt dazu, dass bei der Prädiktion die Intervallbreite von $[\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)]$ wächst, da mehrere Multiplikationen zwischen Intervallen $[\mathbf{A}_i]$ und $[\mathbf{y}(k-i)]$ sowie $[\mathbf{B}_i]$ und $[\mathbf{u}(k-i)]$ durchgeführt werden. Im Korrekturschritt werden die prädizierten Intervalle verringert, indem die Schnittmenge

$$[\mathbf{y}(k)] = [\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)] \cap [\mathbf{y}_{\text{mess}}(k)] \quad (5.19)$$

zwischen Messung und Prädiktion gebildet wird. Diese Schnittmenge beschreibt die sowohl mit der Messung als auch dem Modell konsistenten Werte des Ausgangssignals und wird im nächsten Schritt für die Prädiktion genutzt. Zur Fehlerdetektion wird der Korrekturschritt des Verfahrens genutzt. Sofern eine Überschneidung zwischen Messung und Prädiktion in Gleichung (5.19) vorliegt, kann keine Aussage zum Auftreten eines Fehler getroffen werden. Wenn die Bestimmung der Schnittmenge jedoch eine leere Menge liefert, gibt es keine Überschneidung zwischen aktueller Messung und prädizierten Ausgangssignalen. Die gemessenen Werte können dann nicht durch das Intervallmodell erklärt werden und es liegt ein Fehler vor. Durch Nutzung der Intervallarithmetik handelt es sich um eine garantierte Aussage, sofern die Voraussetzungen zum Intervalleinschluss der Messdaten erfüllt sind.

Die beim ARX-Filter notwendigen Berechnungen lassen sich sehr effizient implementieren und weisen eine geringe Komplexität auf. Gegenüber den Verfahren im Zustandsraum fällt der Schritt zur Bestimmung einer Zustandsmenge für die aktuelle

Messung weg, da beim ARX-Filter direkt die Ausgangssignale genutzt werden. Dies führt zu einer deutlichen Verringerung der notwendigen Rechenoperationen. Im Vergleich zu den in dieser Arbeit genutzten indirekten Verfahren zur Fehlerdetektion ist die Komplexität des ARX-Filters deutlich reduziert, was im Hinblick auf eine echtzeitfähige Implementierung vorteilhaft ist. In dieser Arbeit wurde eine Implementierung als Mex-Function in C++ für Matlab umgesetzt, wobei für einige der benötigten Intervalloperationen eine in C++ implementierte Bibliothek aus [Wol10] genutzt wird. Somit besteht durch das in dieser Arbeit vorgestellte ARX-Filter eine effiziente Möglichkeit, die identifizierten Modelle direkt und ohne Transformationen in den Zustandsraum zur Fehlerdetektion zu nutzen, indem die Idee der Zustandsmengenbeobachtung auf ARX-Modelle übertragen wird.

5.2.2 Simulationsbeispiele zur Fehlerdetektion

Die Anwendung der Fehlerdetektion auf die durch die mengenbasierte Black-Box-Identifikation gewonnenen Modelle wird im Folgenden an mehreren Beispielsystemen demonstriert. Dabei werden exemplarisch drei unterschiedliche Fehlerarten simuliert und anhand des im vorherigen Abschnitt vorgestellten ARX-Filters detektiert. Zur Verdeutlichung werden dabei drei der in dieser Arbeit bereits mehrfach betrachteten Beispielsysteme für die Fehlerdetektion der unterschiedlichen Fehlerarten verwendet.

Zunächst wird das erste MIMO-System erster Ordnung mit dem Identifikationsergebnis aus Abschnitt 5.1.3 betrachtet. Das System wird mit den Parametern (4.18) simuliert. Dabei wird das System durch die beiden Funktionen

$$u_1(k) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{20}k \cdot 2\pi\right), \quad u_2(k) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{10}k \cdot 2\pi\right) \quad (5.20a)$$

als Eingangssignal angeregt. Die Wahl der Eingangssignale ist beliebig und hängt von der Anwendung des Systems ab, weshalb zur Demonstration in diesem Beispiel deutlich andere Signale als zur Identifikation eingesetzt werden. Um einen Fehler durch sich ändernde Systemparameter zu simulieren, wird im Abtastschritt $k = 100$ der Parameter, welcher die Kopplung zwischen den beiden Systemausgängen im AR-Teil \mathbf{A}_1 des Modells (4.19) beschreibt, von $a_{2,1} = 0,9$ auf $a_{2,1} = 0,7$ verringert. Die so erzeugten Daten werden durch einen gleichverteilten Fehler mit der Amplitude 1% des jeweiligen maximalen Signalwerts überlagert, welcher auch zum Einschluss der so erzeugten Messdaten durch Intervalle als Intervallradius genutzt wird. Diese Unsicherheitsradien. Diese betragen bei Anregung des System nach Gleichung (5.20a) für die Eingangsdaten $u_{1,\Delta} = 2,5 \times 10^{-3}$ bzw. $u_{2,\Delta} = 5,0 \times 10^{-3}$ und für die Daten der beiden Ausgänge $y_{1,\Delta} = 10,0 \times 10^{-3}$ bzw. $y_{2,\Delta} = 10,4 \times 10^{-3}$.

Die Anwendung des in dieser Arbeit vorgestellten ARX-Filters auf diese Daten ist in Abbildung 5.9 dargestellt. In Abbildung 5.9(a) ist ein Ausschnitt des Signalverlaufs um den Zeitpunkt des Fehlers abgebildet. Dabei sind die simulierten Intervalle der Ausgangssignale als rote Fläche dargestellt. Als blaue Fläche sind die prädierten Intervalle im ARX-Filter eingezeichnet. Die Überlappung zwischen Ausgang des Systems und Prädiktion ist in Grün dargestellt. Diese Überlappung stimmt zu vielen Abtastpunkten direkt mit den simulierten Intervallen der Ausgangssignale überein und verdeckt diese im Bild, da bei der Prädiktion die Intervallbreite ansteigt. Sobald im System der Parameterfehler aufgetreten ist, führt dies in diesem Beispiel beim zweiten Ausgang zur Fehlerdetektion in Schritt 109. Der durch den Fehler betroffene Parameter beschreibt den Einfluss des ersten Ausgangs auf den zweiten Ausgang, im System ist zudem keine Kopplung in umgekehrter Richtung enthalten. Daher ist die Auswirkung der Parameteränderung am ersten Ausgang nicht sichtbar, weshalb in diesem Signal der Fehler nicht detektierbar ist. Die Abbildungen 5.9(b) und 5.9(c) enthalten jeweils eine zweidimensionale Darstellung der Signale im Ausgangsraum, wobei dieselben Farben wie in Abbildung 5.9(a) genutzt werden. Die Abbildung 5.9(b) zeigt die Situation im Abtastschritt bevor der Fehler detektiert wird. Die Prädiktion beinhaltet in diesem Schritt die Intervalle des Systemausgangs komplett. In Abbildung 5.9(c) dagegen besteht keine Überlappung zwischen den Intervallen mehr, was zur Fehlerdetektion führt.

Da die Parameteridentifikation dieses Beispielsystems mittels Zonotopen durchgeführt wurde, bietet es sich an, diese Parametermengen bei der Fehlerdetektion ebenfalls einzusetzen. Da es sich beim Identifikationsergebnis um vierdimensionale Parameterzonotope handelt ist eine grafische Darstellung an dieser Stelle nicht möglich. Dennoch wird an dieser Stelle kurz die Vorgehensweise und das Ergebnis beschrieben. Zur Fehlerdetektion mit Zonotopen wird das in dieser Arbeit vorgestellte Zonotopverfahren der Parameteridentifikation aus Abschnitt 5.1.2 als indirektes Fehlerdetektionsverfahren genutzt. Das Ergebnis der Parameteridentifikation (vgl. Abschnitt 5.1.3 und Anhang D.3) wird hierfür als initiales Zonotop für das rekursive Verfahren benutzt. Bereits in Abtastschritt $k = 102$ wird in diesem Beispiel der Fehler erkannt, da keine Übereinstimmung des Parameterzonotops mit dem durch den aktuellen Wert definierten Bereich im Parameterraum vorliegt.

Als weiteres Beispiel wird das ARX-Filter auf das instabile System aus Abschnitt 4.3.6 angewandt. Dazu wird das System durch den Regler

$$\mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} 0,10 & -0,02 & 1,39 \\ -0,76 & -0,46 & -1,86 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

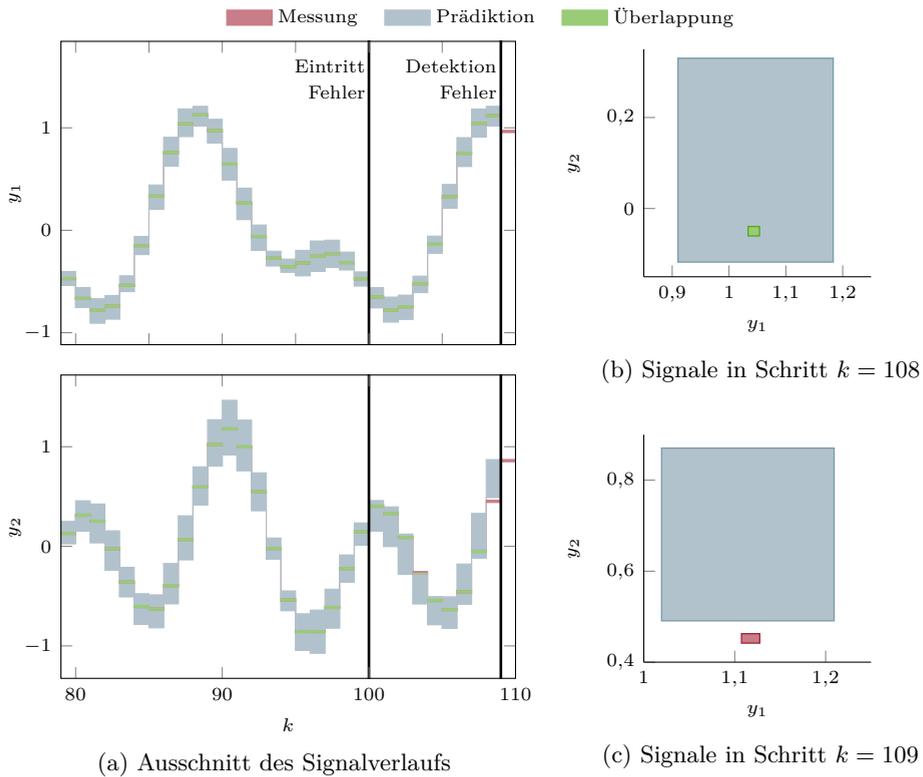


Abbildung 5.9: Detektion einer Parameteränderung des ersten MIMO-Systems

mit statischem Vorfilter

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0,43 & 1,11 \\ 1,79 & 5,50 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

stabilisiert und im Arbeitspunkt $\mathbf{y}_{AP} = (1,0 \quad -0,5)$ gehalten, wobei Regler und Vorfilter gegenüber der Identifikation geändert wurden. Zur Nachbildung gemessener Daten werden die simulierten Signalverläufe in diesem Beispiel jeweils durch gleichverteilte Störungen mit den Fehlerschranken $u_{1,\Delta} = 0,010$, $u_{2,\Delta} =$, $y_{1,\Delta} = 0,020$ bzw. $y_{2,\Delta} = 0,005$ überlagert. Diese orientieren sich nicht an den Amplituden der Signale, da die Ein- und Ausgangssignale des Systems durch den Regler auf einem konstanten Arbeitspunkt gehalten werden und somit die Signalamplituden sehr gering sind. Die gewählten Schranken der Fehler sind stattdessen etwas größer als die Unsicherheiten der Identifikationsdaten und legen auch die Intervallradien der Daten fest.

Zur Simulation eines Fehlers wird zum Abtastschritt $k = 100$ der Parameter $\Phi_{1,2}$ in der Systemmatrix des Zustandsraummodells (4.34a) zu null gesetzt, was den ersten Systemausgang beeinflusst. Für die Fehlerdetektion wird das mittels linearer Optimierung identifizierte Modell aus Abschnitt 5.1.3 eingesetzt. Das ARX-Filter detektiert damit im Abtastschritt $k = 104$ den Fehler, was in Abbildung 5.10 dargestellt ist. Die Teilgrafik 5.10(a) stellt den relevanten Ausschnitt der Signalverläufe am Ausgang inklusive der prädizierten Intervalle dar. In Schritt $k = 104$ besteht am ersten Systemausgang keine Überlappung zwischen Ausgangsgröße und prädizierter Ausgangsgröße, was zur Detektion des Fehlers führt. In den Abbildungen 5.10(b) und 5.10(c) sind die Schritte bis zur Detektion wie im vorherigen Beispiel im Ausgangsraum dargestellt. Auch an diesen Abbildungen wird deutlich sichtbar, dass ein Fehler im System aufgetreten ist.

Als Beispiel für eine weitere Art von auftretenden Fehlern wird ein direkter Messfehler des Ausgangssignals demonstriert. Dazu wird das zweite MIMO-System aus Abschnitt 5.1.3 mit den dort genutzten Einstellungen der Simulation eingesetzt. Die Fehlerschranken der überlagerten gleichverteilten Störungen werden zu $u_{1,\Delta} = 1,0 \times 10^{-3}$, $u_{2,\Delta} = 1,0 \times 10^{-3}$, $u_{3,\Delta} = 1,3 \times 10^{-3}$, $y_{1,\Delta} = 2,1 \times 10^{-3}$ bzw. $y_{2,\Delta} = 3,5 \times 10^{-3}$ gewählt, was 1‰ Unsicherheit bezogen auf die jeweilige maximale Signalamplitude entspricht.

Als Fehler wird die Amplitude des Signalverlaufs für den zweiten Ausgang ab Schritt $k = 100$ um 10 % vergrößert, um einen Messfehler zu simulieren. Die Fehlerdetektion mit dem ARX-Filter liefert in diesem Beispiel eine sehr schnelle Detektion in Schritt $k = 107$. In Abbildung 5.11 ist der relevante Ausschnitt für die Fehlererkennung mit dem ARX-Filter dargestellt. Wie in den vorherigen Abbildungen zeigt die Teilgrafik 5.11(a) die Signalverläufe beider Ausgangssignale. Der Fehler wird in diesem Beispiel durch eine leere Schnittmenge im zweiten Ausgang detektiert. Die Abbil-

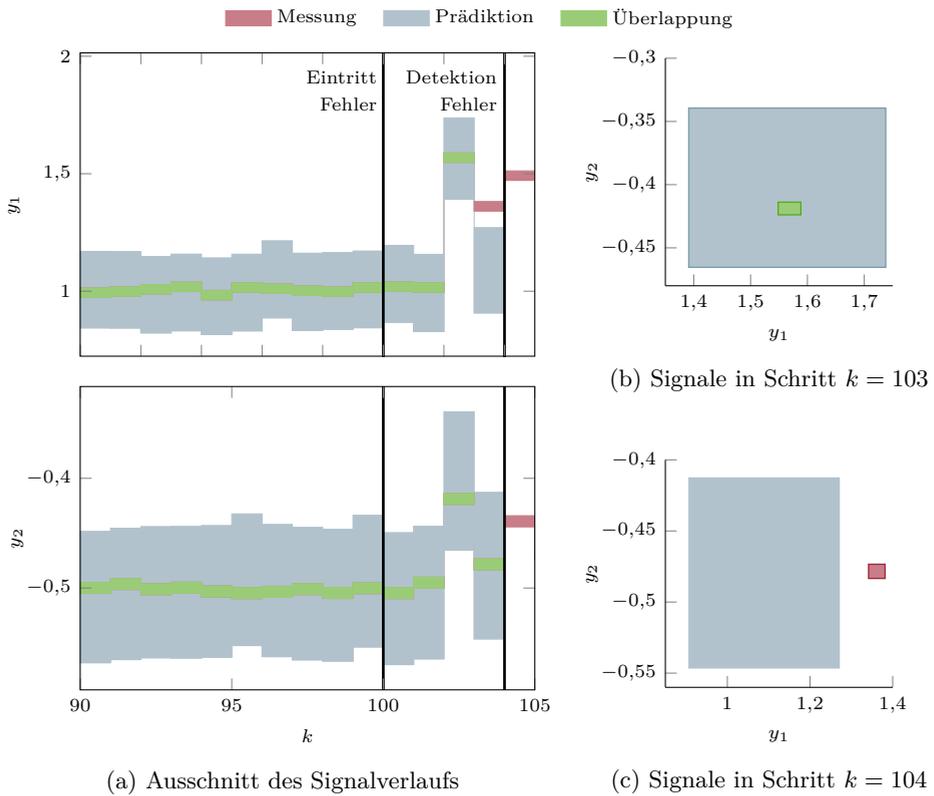


Abbildung 5.10: Detektion einer Parameteränderung des instabilen MIMO-Systems

dungen 5.11(b) und 5.11(c) zeigen den Schritt vor der Detektion und die Detektion im Ausgangsraum. Auch die indirekte Fehlerdetektion liefert in diesem Beispiel eine sehr schnelle Detektion. Das Ellipsoidverfahren zur Parameteridentifikation (vgl. Abschnitt 3.2.4) detektiert den Fehler bereits in Schritt $k = 104$, die Detektion mittels rekursivem IGS-Verfahren bzw. Zonotop-Identifikation benötigen bis zum Schritt $k = 106$ bzw. $k = 108$ für die Detektion und liefern damit ebenfalls sehr schnell eine garantierte Fehlerdetektion. Eine grafische Darstellung der indirekten Fehlerdetektionsverfahren wird aufgrund des mehrdimensionalen Parameterraums in diesem Beispiel nicht angegeben.

Anhand der in diesem Abschnitt durchgeführten Simulationen konnte somit gezeigt werden, dass die durch die in dieser Arbeit vorgestellte Black-Box-Identifikation gewonnenen Modelle zur mengenbasierten Fehlerdetektion eingesetzt werden können, und dabei garantierte Aussagen ermöglicht werden. Durch das in diesem Kapitel vorgestellte ARX-Filter, ebenso wie durch die indirekten Verfahren zur Fehlerdetektion anhand von Parameteridentifikationsverfahren, können die Modelle ohne Transformation in den Zustandsraum direkt eingesetzt werden.

5.3 Zusammenfassung und Überblick

Im fünften Kapitel dieser Arbeit wurde eine Kombination von Ordnungsbestimmung und Parameteridentifikation zu einem Verfahren zur Black-Box-Identifikation für Messdaten mit unbekanntem, aber beschränkten Fehlern vorgestellt. Dabei wurde gezeigt, dass die in dieser Arbeit präsentierte mengenbasierte Ordnungsbestimmung universell mit verschiedenen Identifikationsverfahren für Parametermengen aus der Literatur kombiniert werden kann ohne auf ein bestimmtes Verfahren festgelegt zu sein. Somit besteht die Möglichkeit, je nach geplantem Anwendungszweck des Modells, eine geeignete Mengenbeschreibung für die Parameter zu nutzen. Es handelt sich hierbei um die erste bekannte Möglichkeit zur mengenbasierten Black-Box-Identifikation.

Um die bei der Ordnungsbestimmung eingesetzten Datenmatrizen bei der Parameteridentifikation ebenfalls zu nutzen, bieten sich die auf Intervallgleichungssystemen basierenden Verfahren an. Bei der Identifikation von Systemen mit mehreren Ausgangsgrößen wird durch diese Datenmatrizen die Identifikation einer reduzierten Parametermatrix ermöglicht. Diese Parametermatrix kann durch reellwertige Nullparameter zur kompletten Parametermatrix des Systems ergänzt werden, da die entsprechenden Parameter nicht zur Beschreibung des Systemverhaltens erforderlich sind. In diesem Kapitel wurde zudem eine Kombination mehrerer Standardverfahren zu einem neuen rekursiven Parameteridentifikationsverfahren anhand eines IGS,

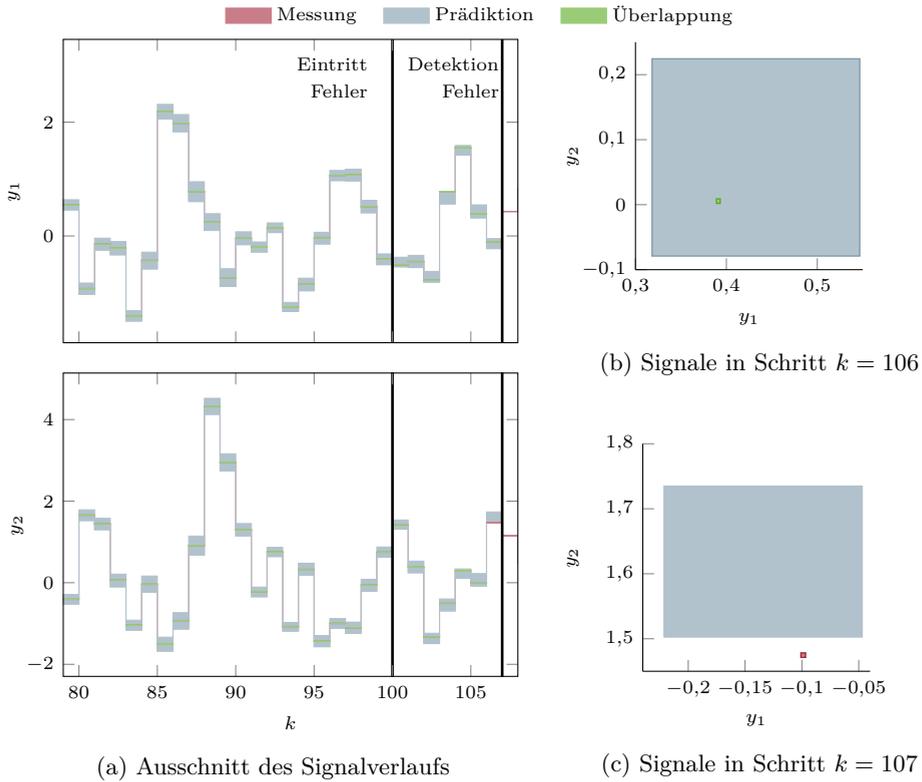


Abbildung 5.11: Detektion einer Parameteränderung des zweiten MIMO-Systems

welche die Vorteile der unterschiedlichen Verfahren nutzt und dabei nur einen geringen Speicheraufwand auch für große Datensätze hat. Zudem wurde in diesem Kapitel durch Erweiterung der Parameteridentifikation mittels Zonotopen für den EIV-Fall ein weiteres neues Verfahren zur mengenbasierten Parameteridentifikation vorgestellt.

Als zweiter Schwerpunkt wurde in diesem Kapitel die Anwendung der identifizierten Modelle mit unsicheren Parametern zur Fehlerdetektion betrachtet. Dazu wurde das ARX-Filter als direktes Fehlerdetektionsverfahren vorgestellt, welches die bei der Identifikation gewonnenen ARX-Modelle einsetzt. Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass durch die direkte Nutzung der ARX-Modelle keine Transformation der Messwerte wie beim Zustandsmengenbeobachter und keine Abbildung in den Parameterraum wie bei den indirekten Verfahren erforderlich ist. Anhand verschiedener Simulationen wurden die Identifikation und die Fehlerdetektion demonstriert und die wesentlichen Eigenschaften verdeutlicht. Dabei zeigte sich, dass die Black-Box-Identifikation für unterschiedliche Mengenbeschreibungen genutzt werden kann und die identifizierten Modelle zur mengenbasierten Fehlerdetektion gut geeignet sind, um garantierte Aussagen zum Auftreten eines Fehlers zu treffen.

Kapitel 6

Anwendungsbeispiele

Im vorherigen Kapitel wurde eine Vorgehensweise zur Black-Box-Identifikation für Messdaten mit beschränkter Unsicherheit, die auf der Ordnungsbestimmung aus Kapitel 4 basiert, vorgestellt und anhand einiger Simulationen demonstriert. Die Identifikationsmethode wird in diesem Kapitel auf Messdaten einiger Laborsysteme angewandt, um Modelle zur Fehlerdetektion zu generieren. Im ersten Teil des Kapitels wird dazu ein Tank betrachtet, dessen Füllstand untersucht wird. Anschließend wird im zweiten Abschnitt die Alterung von Kondensatoren untersucht. Dazu werden verschiedene RC-Bandpassschaltungen eingesetzt. In diesem Kapitel wird zur Parameteridentifikation stets das rekursive IGS-Verfahren und zur Fehlerdetektion das ARX-Filter eingesetzt. Das Kapitel schließt mit einer kurzen Zusammenfassung.

6.1 Füllstand eines Tanks

Als erstes Beispiel wird ein Modell für den Füllstand eines Tanks identifiziert. Das betrachtete Laborsystem besteht aus einem quaderförmigen Tank mit einer Grundfläche von etwa 144 cm^2 . In Abbildung 6.1 ist der Aufbau schematisch dargestellt. Der Tank besitzt zwei identische stets geöffnete Abflüsse die als Störgröße auf das betrachtete System wirken. Der Zufluss \dot{V} zum Tank wird als Eingangssignal des Systems genutzt und durch einen Ultraschall-Durchflusssensor erfasst¹². Die Messunsicherheit dieses Sensors ist abhängig vom aktuellen Messwert und beträgt $\pm 3\%$ für Durchflüsse $\dot{V} > 0,40 \text{ L min}^{-1}$ und ansonsten $\pm 5\%$. Als Ausgangssignal wird der Füllstand im Tank betrachtet, welcher durch einen Drucksensor¹³ am Boden des Tanks gemessen wird. Aufgrund der strömungsbedingten Turbulenzen im Tank schwankt der Messwert des Füllstands, weshalb die Unsicherheit dieser Messung experimentell zu $\pm 3 \text{ mm}$ bestimmt wurde. Die Ansteuerung der Anlage und die

¹²Eingesetztes Modell: cynergy³ UF8B [Cyn16]

¹³Eingesetztes Modell: VEGA Vegabar 14 [VEG16]

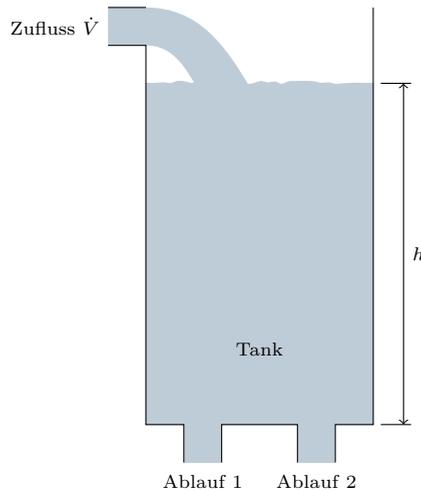


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Tanks

Messdatenerfassung erfolgen mit einem DS1103-System der Firma dSPACE. Da es sich bei diesem Tank um ein nichtlineares System handelt, werden im Folgenden lediglich kleine Abweichungen um den stationären Arbeitspunkt $h_s = 181,30 \text{ mm}$ mit dem stationären Zufluss $\dot{V}_s = 4,51 \text{ L min}^{-1}$ betrachtet. Ein durch klassische Modellbildung gewonnenes und um den Arbeitspunkt (h_s, \dot{V}_s) linearisiertes Modell, kann nach Diskretisierung mit der Abtastzeit $T_a = 1 \text{ s}$ durch das ARX-Modell

$$y(k) = 0,99y(k-1) + 1,15 \times 10^{-3} \text{ min/m}^2 u(k) \quad (6.1)$$

angegeben werden. Dabei sind die Parameter des physikalischen Modells mittels Parameteridentifikation am Laborsystem identifiziert worden.

Um für die mengenbasierte Black-Box-Identifikation eine genügende Anregung sicherzustellen, wird der Zufluss zufällig im Bereich

$$-4,51 \text{ L min}^{-1} \leq \Delta \dot{V} \leq 3,49 \text{ L min}^{-1} \quad (6.2)$$

variiert, was dem kompletten an der Anlage realisierbaren Durchflussbereich von

$$0 \text{ L min}^{-1} \leq \dot{V} \leq 8 \text{ L min}^{-1} \quad (6.3)$$

entspricht. Am Laborsystem wurden zwei Datensätze mit 871 bzw. 483 Datenpunkten mit der Abtastzeit $T_a = 1 \text{ s}$ aufgenommen, deren Länge willkürlich gewählt wurde. Auf die so erzeugten Intervallmessdaten wurde die Ordnungsbestimmung aus

Kapitel 4 angewandt, was als Ergebnis korrekterweise ein Modell erster Ordnung lieferte. Anschließend wurden die Parameter des Systems zu

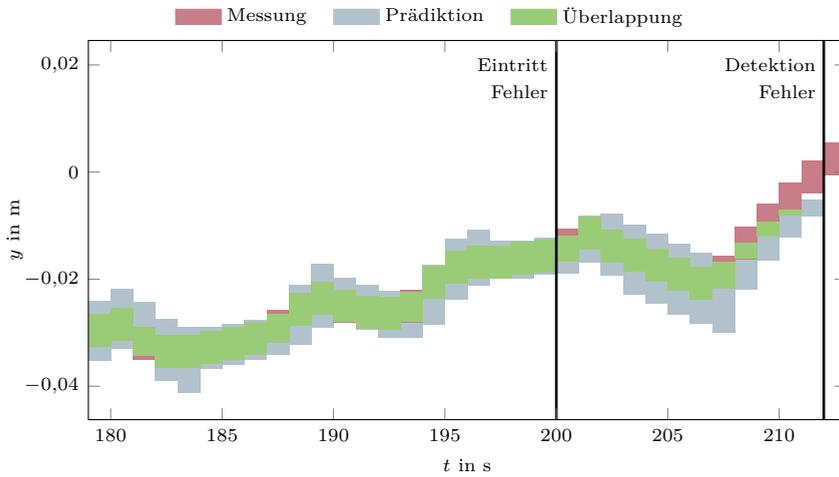
$$[a] = [0,963 ; 1,003], \quad [b] = [-0,116 \times 10^{-3} ; 1,573 \times 10^{-3}] \quad (6.4)$$

identifiziert. Dies stellt einen Einschluss der tatsächlichen Systemparameter (6.1) und somit ein korrektes Systemmodell mit Intervallparametern dar.

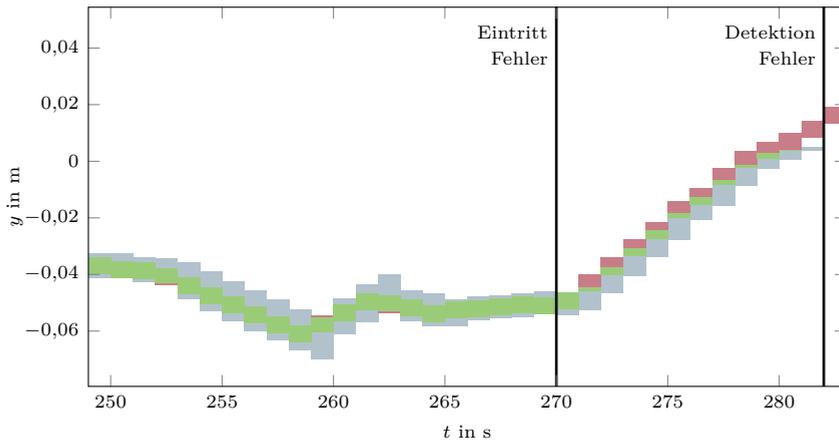
Die untere Schranke des identifizierten Parameterintervalls $[b]$ stellt einen physikalisch unplausiblen Wert dar, da ein negativer Zufluss bei diesem Aufbau nicht möglich ist. Durch Expertenwissen könnte das Intervall somit verkleinert werden, was auch eine Änderung des Parameters $[a]$ bewirken würde. Um derartige Beschränkungen bei der Parameteridentifikation zu berücksichtigen kann die in [JKDW01] beschriebene *Bedingungsfortpflanzung* (engl. constraint propagation) bei der Formulierung des Identifikationsproblems eingesetzt werden. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht auf der Parameteridentifikation liegt wurde dies jedoch hier nicht umgesetzt.

Das so identifizierte Modell kann nun zur Fehlerdetektion eingesetzt werden. Dazu wurden drei zusätzliche, am Modell gemessene Datensätze mit 454, 291 bzw. 592 Datenpunkten aufgenommen. Bei zwei dieser Validierungsdatensätze trat nach einer längeren Betriebszeit ein plötzlicher Fehler auf, indem einer der beiden Abflüsse blockiert wurde. Der dritte Validierungsdatensatz enthält keinen Fehler. Das ARX-Filter ermöglicht mit dem identifizierten Modell die Fehlerdetektion für das betrachtete Laborsystem, ohne im fehlerfreien Datensatz einen Fehlalarm zu generieren.

In Abbildung 6.2 ist der relevante Ausschnitt der Signalverläufe für beide Validierungsdatensätze mit Fehler dargestellt. Dabei werden die Intervalle der Messdaten als rote Fläche abgebildet, die der Prädiktion im ARX-Filter als blaue Fläche. Die Überlappung zwischen Messung und Prädiktion ist in Grün dargestellt und verdeckt zum größten Teil die Messung komplett. Der Fehler im ersten Validierungsdatensatz, der in Abtastschritt 200 auftritt, wird in Schritt 212 erkannt, da keine Überlappung zwischen Messung und Prädiktion besteht und das Modell somit nicht konsistent zu den gemessenen Daten ist. Beim zweiten Validierungsdatensatz mit enthaltenem Fehler tritt der Fehler in Schritt 270 auf und wird vom ARX-Filter in Schritt 282 und damit ebenfalls nach 12 Schritten detektiert. Durch Nutzung der Intervallarithmetik im ARX-Filter in Kombination mit dem identifizierten Modell wird in beiden Fällen die Aussage ermöglicht, dass garantiert ein Fehler im System vorliegt.



(a) Erster Validierungsdatensatz mit Fehler



(b) Zweiter Validierungsdatensatz mit Fehler

Abbildung 6.2: Ausschnitt der Signalverläufe der Validierungsdatensätze am Tank mit auftretendem Fehler

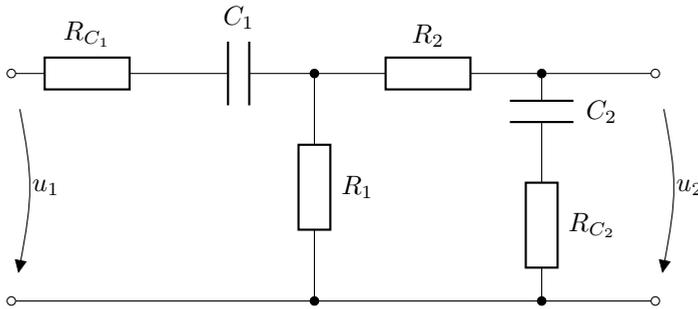


Abbildung 6.3: Schaltung des SISO-Bandpasses

6.2 Alterung von Elektrolyt-Kondensatoren

Als weitere Anwendung der mengenbasierten Black-Box-Identifikation wird die Alterung von Elektrolyt-Kondensatoren untersucht, was anhand verschiedener RC-Bandpassschaltungen erfolgt. Beispielsweise in [Bou10; HK88] wird beschrieben, dass sich die Alterung eines Elektrolyt-Kondensators in einer Erhöhung des äquivalenten Serienwiderstands (ESR, Equivalent Series Resistance) und einer Verringerung der Kapazität niederschlägt. Diese Abweichung der Bauteilparameter von ihren Nominalwerten wird im Folgenden als Fehler angesehen. Alle Messungen an den RC-Bandpassschaltungen wurden mit einem DS1103-System der Firma dSPACE durchgeführt. Die Unsicherheit der eingesetzten Analog-Digital-Wandler beträgt 5 mV und zusätzlich 0,25 % vom Messwert und legt somit die Größe der Intervalle zum Einschluss der Messdaten fest.

6.2.1 SISO-Bandpass mit künstlicher Alterung

Zunächst wird ein SISO-Bandpass betrachtet, dessen Schaltung in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Dabei ist durch R_{C_1} bzw. R_{C_2} der ESR des jeweiligen Kondensators C_1 bzw. C_2 gekennzeichnet. Der Eingang des Systems ist durch die Spannung u_1 , der Ausgang durch u_2 gegeben.

Für das erste Szenario betragen die Bauteilwerte der Widerstände $R_1 = R_2 = 500 \Omega$ sowie der Kondensatoren $C_1 = C_2 = 12,20 \mu\text{F}$. Diese Kapazität ist durch die Parallelschaltung von zwei Kondensatoren mit $10 \mu\text{F}$ und $2,20 \mu\text{F}$ realisiert. Um die Erhöhung des ESR R_{C_1} bzw. R_{C_2} durch Alterung nachbilden zu können, kann zu den Kondensatoren jeweils ein externer Widerstand in Reihe geschaltet werden.

Dieser zusätzliche ESR wird jedoch zur Identifikation zu $0\ \Omega$ vorgegeben, sodass lediglich der tatsächlich in den Kondensatoren vorhandene ESR wirksam ist. Bei dieser Schaltung handelt es sich um ein System mit Durchgriff, welcher durch den ESR bedingt wird.

Für die Erzeugung von Identifikationsdaten mit genügender Anregung wird die Eingangsspannung u_1 gleichverteilt im Bereich 0 V bis 10 V variiert, wobei jeder Spannungswert für 2 ms gehalten wird. Die Spannungen u_1 und u_2 werden direkt an der Schaltung gemessen, um Verfälschungen durch Abweichungen bei der Signalerzeugung sowie durch den Innenwiderstand der Anschlussleitungen auszuschließen. Mit diesem Aufbau wurden zwei Identifikationsdatensätze mit jeweils 9 300 Datenpunkten erzeugt, die mit einer Abtastzeit von $T_a = 1$ ms aufgenommen wurden. Durch die Messunsicherheit der eingesetzten Analog-Digital-Wandler sind die Intervalle zum Einschluss der Eingangs- und Ausgangssignale festgelegt. Im Gegensatz zu den Simulationsbeispielen im vorherigen Kapitel ist die Messunsicherheit nicht konstant über die gesamten Datensätze, sondern abhängig von jeweiligen Messwert. Für die beiden Spannungen beträgt der maximale Intervallradius $u_{1,\Delta_{\max}} = 30$ mV bzw. $u_{2,\Delta_{\max}} = 10,8$ mV und der Mittelwert des Intervallradius beträgt $u_{1,\Delta_m} = 17$ mV bzw. $u_{2,\Delta_m} = 6,2$ mV.

Die Ordnungsbestimmung aus Kapitel 4 liefert für dieses System die Ordnung $n = 2$, was aufgrund der zwei Energiespeicher zu erwarten ist. Damit können mittels rekursivem IGS-Verfahren die Parameter

$$[a_1] = ([\ 1,53; \ 1,55]), \quad [a_2] = ([\ -0,54; \ -0,52]) \quad (6.5a)$$

$$[b_0] = ([\ 0,13; \ 0,14]), \quad [b_1] = ([\ -0,13; \ -0,13]), \quad [b_2] = ([\ -0,01; \ 0,00]) \quad (6.5b)$$

des ARX-Modells identifiziert werden. Das so identifizierte Modell wird nun zur Fehlerdetektion unterschiedlicher Fehlerfälle mittels ARX-Filter eingesetzt. Zunächst wird eine gleich starke Alterung beider Kondensatoren simuliert. Dazu werden während der Messung die parallelgeschalteten Kondensatoren mit $2,20\ \mu\text{F}$ entfernt und gleichzeitig die Widerstände R_{C_1} und R_{C_2} mit jeweils $1\ \Omega$ in Reihe zu den Kondensatoren eingefügt. Für dieses Szenario wurden drei Datensätze aufgenommen, bei denen das ARX-Filter den Fehler 22, 25 bzw. 18 Schritte nach Auftreten des Fehler detektiert. In Abbildung 6.4 ist ein Ausschnitt eines Datensatzes aus diesem Szenario dargestellt. Der Fehler wird in diesem Beispiel nach 18 ms detektiert. In der Abbildung kommt das in Abschnitt 6.1 beschriebene Farbkonzept zum Einsatz. An diesem Beispiel wird ersichtlich, dass das identifizierte Modell gut für die Anwendung zur Fehlerdetektion geeignet ist.

Als weiteres Szenario wird ein Fehler lediglich in Kondensator C_2 betrachtet, welcher sich ebenfalls als Verringerung der Kapazität und gleichzeitige Erhöhung des ESR

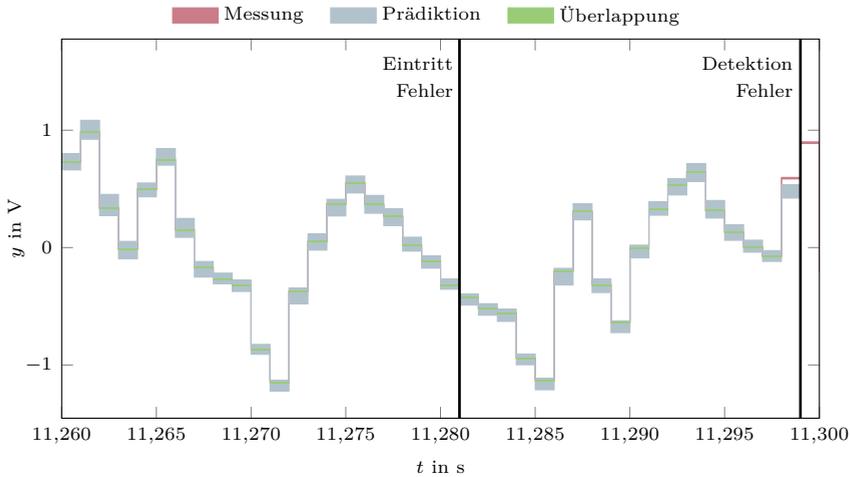


Abbildung 6.4: Ausschnitt des Signalverlaufs des SISO-Systems eines Validierungsdatensatzes mit Fehler in C_1 und C_2

niederschlägt. Der Kondensator C_1 bleibt dabei wie bei den Identifikationsdaten unverändert. In diesem Fall benötigt das Filter für die zwei Datensätze 19 bzw. 18 Schritte um den Fehler zu detektieren. Als dritter Anwendungsfall schließlich wird ein fehlerhafter Kondensator C_1 betrachtet, wobei C_2 wie bei der Identifikation unverändert bleibt. Die Auswirkung dieses Fehlers auf den Ausgang wird durch das Filter etwas schlechter detektiert als in den anderen beiden Szenarien, da nun 89 bzw. 63 Schritte zwischen Eintritt des Fehlers und dessen Detektion liegen. Hintergrund dieser verspäteten Detektion ist eine geringere Auswirkung der Störung auf den Ausgang, da die Ausgangsspannung durch den Kondensator C_2 gepuffert wird. In den durch das ARX-Filter geprüften acht Datensätzen mit jeweils ca. 14 s Länge sind insgesamt 111 449 Datenpunkte enthalten, von denen 91 719 Datenpunkte am fehlerfreien System aufgenommen wurden und auch ein Validierungsdatensatz ohne Fehler enthalten ist. Dabei treten wie erwartet keine Fehlalarme auf.

6.2.2 SISO-Bandpass mit gealterten Kondensatoren

Bei den im vorherigen Abschnitt betrachteten Szenarien wurde die Alterung der Kondensatoren durch eine Verschaltung mit externen Bauteilen realisiert, um das Auftreten des Fehlers während des Betriebs zu simulieren. Im Folgenden wird die Bandpassschaltung aus Abbildung 6.3 mit einem real gealterten Elektrolyt-Kondensator eingesetzt.

Die Schaltung wird dazu mit zwei Kondensatoren $C_1 = C_2 = 47 \mu\text{F}$ und den Widerständen $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ aufgebaut. Die zusätzlichen Widerstände für den ESR R_{C_1} bzw. R_{C_2} sind in diesem Aufbau nicht vorhanden, sodass lediglich der ESR der Kondensatoren wirksam ist. Die Anregung des Systems erfolgt wie im vorherigen Beispiel beschrieben durch eine gleichverteilte Spannung im Bereich 0 V bis 10 V. Zur Identifikation des Modells werden drei Datensätze mit insgesamt 12 386 Datenpunkten aufgezeichnet, wobei für jeden Datensatz der Kondensator C_2 gegen ein anderes, ebenfalls neuwertiges Exemplar ausgetauscht wird, um geringfügige Schwankungen der tatsächlichen Bauteilwerte bei der Identifikation zu berücksichtigen. Die Maximal- und Mittelwerte der Intervallradien sind unverändert wie im vorherigen Beispiel. Auch in diesem Szenario liefert die Ordnungsbestimmung die korrekte Systemordnung $n = 2$ als Ergebnis, sodass die Parameteridentifikation durchgeführt werden kann.

Zur Validierung des identifizierten Modells werden acht weitere Datensätze aufgenommen, wobei ebenfalls jeweils der Kondensator C_2 ausgetauscht wird. Die Anwendung des ARX-Filters mit dem identifizierten Modell verläuft für diese Datensätze ohne Detektion eines Fehlers, da es sich bei allen als C_2 eingesetzten Kondensatoren um neuwertige Exemplare handelt.

Dies ändert sich jedoch, wenn für den Kondensator C_2 ein real gealterter Kondensator eingesetzt wird. Dazu wurde einem handelsüblichen PC-Netzteil, welches nach längerer Betriebszeit einen Defekt aufwies, ein äußerlich intakter Elektrolyt-Kondensator mit der Nennkapazität $47 \mu\text{F}$ entnommen. Mit einem Referenzmessgerät wurde für diesen Kondensator eine Kapazität von $44,8 \mu\text{F}$ und ein ESR von $17,1 \Omega$ ermittelt. Der gealterte Kondensator wird für die Messung von zwei Datensätzen als C_2 eingesetzt. In beiden so gemessenen Datensätzen wird bereits nach wenigen Datenpunkten vom ARX-Filter ein Fehler detektiert, da die Messung nicht mit der Prädiktion des auf neuwertigen Kondensatoren basierenden Modells übereinstimmt. Das mittels mengenbasierter Black-Box-Identifikation ermittelte Modell kann somit gut zur Detektion eines gealterten Kondensators genutzt werden.

6.2.3 SIMO-Bandpass mit simulierter Alterung

Als letztes Beispiel wird eine Bandpassschaltung mit zwei Ausgangssignalen betrachtet. Die Schaltung ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Als Eingang des SIMO-Systems wird, wie bei den vorherigen Systemen, die Spannung u_1 genutzt und als Ausgänge die Spannungen u_2 und u_3 . Die Schaltung wird mit den Widerständen $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_3 = 620 \Omega$, sowie den Kondensatoren $C_1 = 47 \mu\text{F}$ und $C_2 = C_3 = 9,40 \mu\text{F}$ aufgebaut. Dabei werden die Kondensatoren C_2 und C_3 jeweils durch Parallelschaltung von je zweimal $4,70 \mu\text{F}$ aufgebaut, um später eine Kapazitätsverringern zur Nachbildung

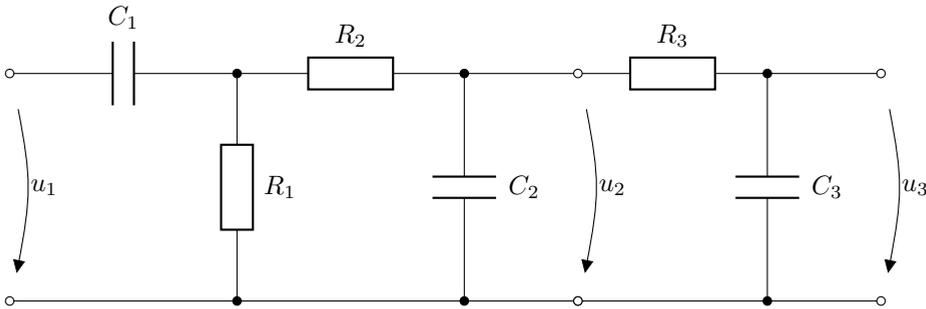


Abbildung 6.5: Schaltung des SIMO-Bandpasses

der Alterung zu ermöglichen. Zur Nachbildung des gealterten Kondensatorverhaltens wird in diesem Beispiel auf eine Erhöhung des ESR verzichtet um die Anzahl der zu schaltenden Bauelemente klein zu halten.

Wie bei den vorherigen Schaltungen wird das System durch eine gleichverteilte Spannung im Bereich 0 V bis 10 V mit einer Haltezeit von 2 ms als Eingangssignal betrieben, um eine genügende Anregung sicherzustellen. Zur Identifikation werden drei Datensätze mit jeweils 9 300 Datenpunkten bei einer Abtastzeit von $T_a = 1$ ms aufgezeichnet. Für die Spannung u_1 beträgt der maximale Intervallradius wie bei den vorherigen Schaltungen $u_{1,\Delta_{\max}} = 30$ mV und der Mittelwert des Intervallradius beträgt $u_{1,\Delta_m} = 17$ mV. Bei den Ausgangsspannungen dieser Schaltung ergeben sich die maximalen Intervallradien zu $u_{2,\Delta_{\max}} = 13,7$ mV bzw. $u_{3,\Delta_{\max}} = 13,2$ mV und die gemittelten Intervallradien zu $u_{2,\Delta_m} = 6,2$ mV bzw. $u_{3,\Delta_m} = 5,9$ mV.

Die Ordnungsbestimmung aus Abschnitt 4.3.3 detektiert für dieses Beispiel acht mögliche Modelle, wobei das ausgewählte Modell der minimalen Ordnung $n_{\text{ARX}} = 2$ die Kombinationsmatrix

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

aufweist. Zur Bestimmung der acht Modellrepräsentationen werden 48 Ranguntersuchungen benötigt, was sich durch Nutzung des optimierten Verfahrens aus Abschnitt 4.3.3 auf zwischen 31 und 37 Ranguntersuchungen reduzieren lässt, in Abhängigkeit von der Reihenfolge der Untersuchungen in der Rekursion (vgl. Abschnitt 4.3.3). Die Parameteridentifikation mittels rekursivem IGS-Verfahren liefert

für das Modell entsprechend Gleichung (2.11) die Parametermatrizen

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} [1,64; 1,84] [-0,15; 0,09] \\ [0,17; 0,31] [0,78; 0,90] \end{pmatrix}, \quad (6.7a)$$

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} [-0,88; -0,56] & 0 \\ [-0,17; 0,03] & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7b)$$

$$[\mathbf{B}_0] = \begin{pmatrix} [0,08; 0,10] \\ [0,00; 0,01] \end{pmatrix}, \quad (6.7c)$$

$$[\mathbf{B}_1] = \begin{pmatrix} [-0,10; -0,08] \\ [-0,02; 0,00] \end{pmatrix}, \quad (6.7d)$$

$$[\mathbf{B}_2] = \begin{pmatrix} [-0,01; 0,02] \\ [-0,01; 0,01] \end{pmatrix}. \quad (6.7e)$$

Die reellwertige Nullspalte in $[\mathbf{A}_2]$ ist durch die Null in der Kombinationsmatrix $\mathbf{\Omega}_2$ begründet, da eine zweifache Verzögerung des zweiten Systemausgangs nicht zur Beschreibung des Systemverhaltens im ARX-Modell erforderlich ist.

Auch dieses Modell wird mittels ARX-Filter zur Fehlerdetektion eingesetzt. Dazu werden drei Datensätze genutzt, bei denen die Kondensatoren C_2 und C_3 während der Messung durch Auflösen der Parallelschaltung gleichzeitig um je $4,70 \mu\text{F}$ verringert werden. Die Fehler, die im Mittel nach etwa 11 200 Abtastpunkten auftraten, werden durch das Filter nach 21, 23 bzw. 58 Schritten detektiert. Auch ein zusätzlich gemessener Validierungsdatensatz mit 15 723 Abtastpunkten ohne Fehler wird vom Filter korrekt verarbeitet.

In Abbildung 6.6 ist ein Ausschnitt aus einem der Datensätze mit Fehler dargestellt. Der Fehler wird dabei anhand des ersten Ausgangssignals detektiert, da bei dieser Messung und Prädiktion nicht überlappen. Auch bei den beiden nicht dargestellten Datensätzen mit Fehler führt der erste Ausgang zur Fehlerdetektion im ARX-Filter.

Anhand dieses Beispielsystems wird zusätzlich die von den eingesetzten Verfahren benötigte Rechenzeit exemplarisch betrachtet. Sämtliche Verfahren wurden auf einem Desktop-PC mit Intel Core-i7 mit 3,4 GHz, Windows 7 64bit und MATLAB Release R2014a ausgeführt und die Rechenzeit über 100 Durchläufe gemittelt. Für die Ordnungsbestimmung des Modells wurden 2,68 s benötigt, bei der optimierten Variante konnte dies auf 1,44 s bzw. 1,78 s reduziert werden. Die Parameteridentifikation mit dem rekursiven IGS-Verfahren benötigte anschließend ca. 94 min. Da die Black-Box-Identifikation offline mit vorab gemessenen Daten durchgeführt wird und keine Echtzeitanforderung besteht, ist die benötigte Rechenzeit jedoch unerheblich. Das ARX-Filter, welches als in C++ implementierte Mex-Funktion in Matlab eingebunden ist, benötigte für den betrachteten Validierungsdatensatz ohne Fehler 0,039 s,

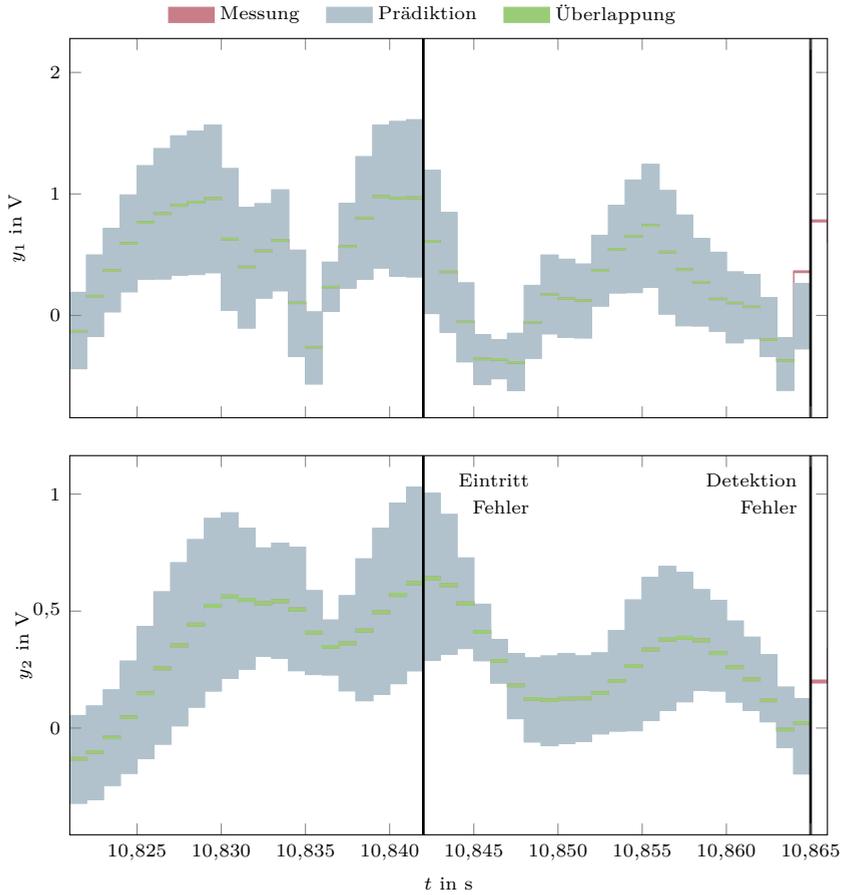


Abbildung 6.6: Ausschnitt des Signalverlaufs des SIMO-Systems eines Validierungsdatensatzes

für die drei Datensätze mit Fehler aufgrund des vorzeitigen Abbruchs am Fehler im Mittel 0,036 s. Dadurch ergibt sich eine mittlere Verarbeitungszeit pro Abtastschritt von etwa $3 \mu\text{s}$ für dieses System. Durch die geringe Rechenzeit des ARX-Filters ist ein echtzeitfähiger Einsatz der Fehlerdetektion denkbar.

6.3 Zusammenfassung und Überblick

In diesem Kapitel wurde die Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten mengenbasierten Black-Box-Identifikation an verschiedenen Laborsystemen betrachtet. Dazu wurde zunächst der Füllstand eines Tanks als Beispiel untersucht. Durch die Ordnungsbestimmung und die anschließende Parameteridentifikation mit dem rekursiven IGS-Verfahren konnte ein Modell mit Intervallparametern identifiziert werden. Dieses Intervallmodell ist gut zur Fehlerdetektion des Systems geeignet, was anhand des ARX-Filters bei der Detektion eines verstopften Abflusses demonstriert wurde.

Als weiteres Anwendungsbeispiel wurde die Detektion gealterter Kondensatoren in RC-Bandpassschaltungen betrachtet. In unterschiedlichen Szenarien wurden dazu SISO- und SIMO-Schaltungen aufgebaut und mittels der in dieser Arbeit vorgestellten mengenbasierten Black-Box-Identifikation modelliert. Bei zwei Schaltungen wurden durch externe Bauteile eine Alterung von Kondensatoren nachgestellt und durch das ARX-Filter als Fehler detektiert. Auch in einem Szenario mit einem real gealterten Kondensator wurde mit dem identifizierten Modell und dem ARX-Filter gezeigt, dass die vorgestellten Verfahren für diesen Anwendungsfall geeignet sind.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur Black-Box-Identifikation eines linearen, zeitdiskreten Modells aus Messdaten mit unbekanntem, aber beschränkten Fehler vorgestellt. Dies wird durch ein neues Verfahren zur Bestimmung der Systemordnung direkt aus den Intervallmessdaten ermöglicht, welches in Kombination mit verschiedenen Verfahren zur Parameteridentifikation die Identifikationsmethode bildet. Voraussetzung dabei ist, dass die Messdaten in Form von Intervallen vorliegen, welche so gewählt sind, dass trotz vorhandener Messfehler der tatsächliche ungestörte Wert des Signals im Intervall eingeschlossen ist. Da keine Information zur Verteilung der Unsicherheit innerhalb der Schranken benötigt wird, stellt diese Beschreibungsform für einige Systeme eine Alternative zur weit verbreiteten stochastischen Unsicherheitsbeschreibung dar.

Die Grundidee der Ordnungsbestimmung ist eine Analyse des Spaltenrangs speziell aufgebauter Datenmatrizen. Durch das Auftreten eines Rangabfalls beim Aufbau dieser Datenmatrizen kann die Ordnung eines ARX-Modells bestimmt werden. Um dies zu ermöglichen, ist auf eine genügende Anregung des Systems in Kombination mit einer zur Systemdynamik passenden Abtastzeit sowie einer durch geeignete Sensorik und Aktorik vorgegebenen kleinen Intervallgröße zu achten. Andernfalls kann in den Datenmatrizen ein Rangabfall auftreten, der nicht durch die Ordnung des Systems bedingt ist und somit zu falschen Ergebnissen führen würde. Bei der Ordnungsbestimmung muss zwischen Systemen mit einer Ausgangsgröße und mit mehreren Ausgangsgrößen unterschieden werden, da die ARX-Modelldarstellung im Mehrgrößenfall nicht eindeutig ist und interne Kopplungen zwischen den Ausgangsgrößen einen zusätzlichen Rangabfall der Datenmatrizen verursachen können. Um diese Problematik zu umgehen wurden in der Arbeit zwei Verfahrensvarianten für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen vorgestellt. Die Methode der direkten MISO-Erweiterung liefert dabei potenziell nicht die minimale ARX-Modellordnung, bestimmt dafür jedoch die minimale Ordnung eines Zustandsraummodells. Im Gegensatz dazu detektiert die zweite Methode die minimale ARX-Modellordnung, da

alle im System vorhandenen Kopplungen durch einen rekursiven Algorithmus berücksichtigt werden. Da die Modelle für Mehrgrößensysteme nicht eindeutig sind, besteht bei diesem Verfahren die Möglichkeit, eigene Kriterien zur Auswahl des für die geplante Anwendung passenden Modells zu integrieren. Die Ordnungsbestimmung kann dabei nicht nur für stabile Systeme im offenen Regelkreis, sondern auch für instabile Systeme im durch einen stabilisierenden Regler geschlossenen Regelkreis eingesetzt werden. Anhand mehrerer simulativer Beispiele wurde die Vorgehensweise bei der Ordnungsbestimmung veranschaulicht.

Durch die in dieser Arbeit vorgestellte Ordnungsbestimmung wird die in der Literatur existierende Lücke von der Parameteridentifikation zur mengenbasierten Black-Box-Identifikation geschlossen. Dazu kann die Ordnungsbestimmung mit unterschiedlichen Verfahren zur Parameteridentifikation kombiniert werden, um ein datenbasiertes ARX-Modell zu identifizieren. Dieses Modell kann anschließend bei Bedarf in ein Zustandsraummodell umgeformt werden, welches dann jedoch keine Minimalrealisierung darstellt. Die Ordnungsbestimmung ist durch diese Kombinationsmöglichkeit universell einsetzbar und kann bei der Bestimmung von Modellen mit unterschiedlichen Beschreibungsformen der Parametermengen für verschiedene Anwendungen genutzt werden. Anhand von simulierten Beispielsystemen wurde die Vorgehensweise in dieser Arbeit gezeigt.

Um die bei der Ordnungsbestimmung verwendeten Datenmatrizen optimal zu nutzen, wurde zudem ein rekursives Verfahren zur Parameteridentifikation mittels Intervall-Gleichungssystemen vorgestellt. Dabei wird durch rekursive Aufteilung des Intervallgleichungssystems und Kombination verschiedener Lösungsverfahren aus der Literatur eine Parametermenge für die Messdaten des Systems bestimmt. Die so gewonnenen Modelle stellen aufgrund der bei der Identifikation genutzten Intervallarithmetik einen garantierten Einschluss des tatsächlichen Systemverhaltens dar.

Als mögliche Anwendung wurden die identifizierten Modelle in dieser Arbeit zur Fehlerdetektion genutzt. Die mengenbasierten Systemmodelle bieten den Vorteil, dass ein detektierter Fehler garantiert aufgetreten ist. Somit wird eine Fehlerdetektion ohne Fehlalarme ermöglicht. Der Nachteil dabei ist jedoch, dass diese Verfahren keine Aussage zur Fehlerfreiheit des Systems treffen können, wenn kein Fehler detektiert wird. Eine Möglichkeit zur Anwendung der identifizierten Modelle stellt die Nutzung rekursiver Parameteridentifikationsverfahren als indirektes Fehlerdetektionsverfahren dar. Dabei wird bei jeder neuen Messung ein Bereich im Parameterraum bestimmt, der mit dieser Messung konsistent ist. Besteht keine Überschneidung zwischen diesem Bereich und den Modellparametern, muss ein Fehler aufgetreten sein. Diese Vorgehensweise wird mit einigen der in der Arbeit beschriebenen Identifikationsverfahren anhand von Simulationsbeispielen demonstriert.

Als effiziente Alternative zu den indirekten Fehlerdetektionsverfahren wurde in der Arbeit ein direktes Verfahren für die identifizierten ARX-Modelle vorgestellt. Es basiert auf dem aus der Literatur bekannten Zustandsmengenbeobachter, arbeitet im Gegensatz dazu jedoch direkt im Ausgangsraum des Systems. Da es auf einer Prädiktor-Korrektor-Struktur beruht, wird es in der Arbeit als ARX-Filter bezeichnet. Bei jeder neuen Messung wird dabei eine Prädiktion der Ausgangsgrößen des Systems anhand des identifizierten Modells durchgeführt und die Schnittmenge mit den aktuell gemessenen Werten gebildet. Sofern diese Schnittmenge leer ist, muss ein Fehler im System aufgetreten sein. Andernfalls stellt die Schnittmenge die Basis für die nächste Prädiktion dar. Das ARX-Filter kann aufgrund seiner einfachen Struktur sehr effizient implementiert werden und kann somit auch für zeitkritische Anwendungen zum Einsatz kommen.

Abschließend wurde die Leistungsfähigkeit der vorgestellten mengenbasierten Black-Box-Identifikation anhand mehrerer Laborsysteme demonstriert. Als Beispiele wurde die datenbasierte Modellierung des Füllstand eines Tanks sowie mehrerer RC-Bandpassschaltungen betrachtet. An diesen Laborsystemen wurden Intervallmodelle identifiziert und zur Detektion unterschiedlicher Fehler eingesetzt. Damit konnte demonstriert werden, dass die mengenbasierte Black-Box-Identifikation, basierend auf der in dieser Arbeit vorgestellten Methode zur Ordnungsbestimmung, in Kombination mit dem ARX-Filter für reale Messdaten eingesetzt werden kann und eine Fehlerdetektion ohne Fehlalarme ermöglicht.

Anhang A

Lösungsverfahren für lineare Intervall-Gleichungssysteme

A.1 Krawczyk-Methode

In [Kra69] wird eine iterative Lösungsmethode vorgestellt, mit welcher ein Einschluss der Lösungsmenge eines quadratischen IGS bestimmt werden kann. Die hier angegebene Beschreibung orientiert sich an [MKC09]. Das Gleichungssystem

$$\mathbf{C}[\mathbf{M}][\boldsymbol{\vartheta}] = \mathbf{C}[\mathbf{y}] \quad (\text{A.1})$$

wird durch einen Prädiktionierer so modifiziert, dass

$$\|\mathbf{E}\|_\infty = \|\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{M}]\|_\infty < 1 \quad (\text{A.2})$$

erfüllt ist. Häufig wird dazu die inverse Mittelpunktmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{M}_m^{-1}$ als Prädiktionierer eingesetzt. Für den Start des Verfahrens wird ein Intervallvektor benötigt, welcher sicher die Lösungsmenge enthält. Eine mögliche Wahl hierfür stellt der Vektor

$$[\boldsymbol{\vartheta}]^{(0)} = \left([-\alpha, \alpha] \quad \dots \quad [-\alpha, \alpha] \right)^T \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\mathbf{C}[\mathbf{y}]}{1 - \|\mathbf{E}\|_\infty} \quad (\text{A.3})$$

dar. Mit diesem initialen Einschuss und der Iterationsgleichung

$$[\boldsymbol{\vartheta}]^{(i+1)} = \left(\mathbf{C}[\mathbf{b}] + \mathbf{E}[\boldsymbol{\vartheta}]^{(i)} \right) \cap [\boldsymbol{\vartheta}]^{(i)} \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{A.4})$$

kann eine Folge von Intervallvektoren bestimmt werden, welche alle die tatsächliche Lösungsmenge beinhalten und zu dieser hin konvergieren.

A.2 Hansen-Blik-Rohn-Ning-Kearfott-Neumaier-Methode

Ein Einschluss der Lösungsmenge eines quadratischen IGS kann durch folgenden Algorithmus bestimmt werden, sofern es sich bei der Matrix $[\mathbf{M}]$ um eine *H-Matrix*¹⁴ handelt [Neu99]. Für mit der inversen Mittelpunktmatrix präkonditionierte Systeme

$$\mathbf{C}[\mathbf{M}][\vartheta] = \mathbf{C}[\mathbf{y}]. \quad (\text{A.5})$$

ist dies in der Regel erfüllt. Der Einschluss der Parameter kann komponentenweise für $j = 1, \dots, \ell$ mittels

$$[\vartheta_j] = \frac{[\mathbf{y}_j] + [-\beta_j, \beta_j]}{[\mathbf{M}_{jj}] + [-\alpha_j, \alpha_j]} \quad (\text{A.6})$$

berechnet werden, wobei die benötigten Größen durch

$$u = \mathbf{B} \left| [\mathbf{y}] \right|, \quad d_j = \left(\langle \mathbf{M} \rangle^{-1} \right)_{jj}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\alpha_j = \langle \mathbf{M}_{jj} \rangle - \frac{1}{d_j}, \quad \beta_j = \frac{u_j}{d_j} - \left| [y_j] \right| \quad (\text{A.7b})$$

bestimmt werden. Dabei wird die *Vergleichsmatrix* für die Intervallmatrix $[\mathbf{M}]$ verwendet, welche durch

$$\langle \mathbf{M} \rangle_{ji} = \begin{cases} \min \left(|\alpha| \mid \alpha \in [\mathbf{M}_{jj}] \right) & \text{für } j = i \\ -\max \left(|\alpha| \mid \alpha \in [\mathbf{M}_{ji}] \right) & \text{für } j \neq i \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

definiert ist. Für die Bestimmung von \mathbf{u} in Gleichung (A.7a) wird eine numerisch garantierte Approximation der inversen Vergleichsmatrix benötigt, welche nach [Neu99] durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden kann:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{M} \rangle^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = (1 \quad \dots \quad 1)^{\text{T}}, \quad (\text{A.9a})$$

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{M} \rangle^{-1} \tilde{\mathbf{u}} > 0, \quad \mathbf{R} = \langle \mathbf{M} \rangle \tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{I}, \quad (\text{A.9b})$$

$$w_i = \max_j \frac{-\mathbf{R}_{ji}}{\mathbf{u}_j}, \quad \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{v}\mathbf{w}^{\text{T}}. \quad (\text{A.9c})$$

¹⁴Die Matrix $[\mathbf{M}]$ ist eine *H-Matrix*, wenn $\nu > 0$ mit $\langle \mathbf{M} \rangle \nu > 0$. Dabei wird die Vergleichsmatrix (A.8) benötigt. Jede Matrix $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$ ist dann regulär.

Dabei muss für die Berechnung von \mathbf{u} und \mathbf{R} der Rundungsmodus des Prozessors so eingestellt sein, dass abgerundet wird, bei der Berechnung von $\hat{\mathbf{B}}$ und \mathbf{v} dagegen so, dass aufgerundet wird. Bei den restlichen Operationen sollte zum nächstgelegenen Wert gerundet werden.

A.3 Präkonditioniertes Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren

Bei diesem Verfahren wird das präkonditionierte IGS

$$\mathbf{C}[\mathbf{M}] \left([\vartheta] - \tilde{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{C}[\mathbf{y}] \quad (\text{A.10})$$

betrachtet, welches für $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ dem bisher betrachteten Gleichungssystem (A.1) bzw. (A.5) entspricht. Die folgende Beschreibung orientiert sich an [Bee06] und [Wol10].

Ausgehend von einem initialen Einschluss der Lösungsmenge $[\vartheta]^{(0)} \supseteq \mathcal{D}_\vartheta$ wird in jedem Schritt des Verfahrens komponentenweise die Schnittmenge

$$[\vartheta_j]^{(i+1)} = [\vartheta_j]^{(i)} \cap [\hat{\vartheta}_j] \quad (\text{A.11})$$

zwischen dem bisherigen Einschluss und dem aktuellen Ergebnis bestimmt. Dieses Ergebnis im aktuellen Schritt wird gemäß

$$[\hat{\vartheta}_j] = \tilde{x}_j - \frac{-\mathbf{C}_{j:}[\mathbf{y}] + \sum_{l=1, l \neq j}^{\ell} \left(\mathbf{C}_{j:}[\mathbf{M}_{:l}] \right) \left([x_l] - \tilde{x}_l \right)}{\mathbf{C}_{j:}[\mathbf{M}_{:j}]} \quad (\text{A.12})$$

berechnet, wobei $\mathbf{C}_{j:}$ die j -te Zeile der Matrix \mathbf{C} bezeichnet und $[\mathbf{M}_{:j}]$ die j -te Spalte von $[\mathbf{M}]$. Dies wird für alle $j = 1 \dots \ell$ durchgeführt.

A.4 Rohn-Methode für überbestimmte Gleichungssysteme

In [Roh95; Roh96] wird eine Methode zum Einschluss der strikten Lösungsmenge eines überbestimmten Gleichungssystems vorgestellt. Die hier angegebene Beschreibung orientiert sich zusätzlich zu den Originalveröffentlichungen an [HH13]. Der Einschluss der Lösungsmenge kann demnach durch

$$[\vartheta] = [\vartheta_0 - \mathbf{d}, \vartheta_0 + \mathbf{d}] \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\mathbf{d} > \mathbf{G}\mathbf{d} + \mathbf{g}, \quad (\text{A.14a})$$

$$\mathbf{G} = |\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{M}_m| + |\mathbf{R}| \mathbf{M}_\Delta, \quad (\text{A.14b})$$

$$\mathbf{g} = |\mathbf{R}(\mathbf{M}_m \vartheta_0 - \mathbf{y}_m)| + |\mathbf{R}|(\mathbf{M}_\Delta |\vartheta_0| + \mathbf{y}_\Delta) \quad (\text{A.14c})$$

bestimmt werden. Dazu wird für die Bestimmung des Mittelpunkts der Lösungsmenge ϑ_0 die LS-Lösung

$$\mathbf{R} \approx \left(\mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m \right)^{-1} \mathbf{M}_m^T \quad (\text{A.15a})$$

$$\vartheta_0 \approx \mathbf{R}\mathbf{y}_m \quad (\text{A.15b})$$

für die Mittelpunktmatrizen \mathbf{M}_m und \mathbf{y}_m verwendet. Um die Ungleichung (A.14a) zu lösen wird diese mittels eines kleinen positiven Vektors \mathbf{f} in die Gleichung

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{d} + \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (\text{A.16})$$

umgeformt, welche ausgehend von der Startlösung $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ iterativ gelöst wird.

Anstatt der Wahl der Matrizen \mathbf{M}_m und \mathbf{y}_m in den Gleichungen (A.15a), kann das Verfahren mit beliebigen Matrizen $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$ und $\mathbf{y} \in [\mathbf{y}]$ wiederholt werden, um die Genauigkeit des Lösungseinschlusses zu verbessern. Dazu wird die Schnittmenge der verschiedenen Lösungsmengen gebildet. Für einen formalen Beweis der Methode und eine Diskussion weiterer Eigenschaften sei auf die bereits zitierte Literatur verwiesen.

Anhang B

Identifikationsverfahren für Parametermengen

B.1 Modified-Optimal-Volume-Ellipsoid-Verfahren

Die im Folgenden angegebene Beschreibung des MOVE-Verfahrens ist [GS92] entnommen. Das Verfahren bestimmt für ein System in der Form

$$\hat{y}(k) = \mathbf{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\vartheta} + \nu_k \quad (3.22)$$

mit der beschränkten Störung

$$\underline{\gamma}_k \leq \nu_k \leq \bar{\gamma}_k \quad (3.23)$$

einen Einschluss der Parameter $\boldsymbol{\vartheta}$ durch ein Ellipsoid. Das iterative Verfahren basiert dabei auf einem vorgegebenen initialen Ellipsoid $\mathcal{E}_0(\mathbf{c}, \mathbf{P})$, welches die Parameter sicher enthält. Für jeden Abtastpunkt k werden die folgenden Schritte durchgeführt:

1. Berechne

$$\underline{\alpha}_k = \max \left(\frac{y_k - \mathbf{c}_{k-1}^T \mathbf{\Phi}_k - \bar{\gamma}_k}{\sqrt{\mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{\Phi}_k}}, -1 \right), \quad (B.1)$$

$$\bar{\alpha}_k = \min \left(\frac{y_k - \mathbf{c}_{k-1}^T \mathbf{\Phi}_k - \bar{\gamma}_k}{\sqrt{\mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{\Phi}_k}}, 1 \right). \quad (B.2)$$

Falls $\underline{\alpha}_k \geq 1$ oder $\bar{\alpha}_k \leq -1$ schlägt das Verfahren fehl, da Voraussetzungen verletzt sind.

2. Falls

$$\epsilon_k = \underline{\alpha}_k \bar{\alpha}_k \leq -\frac{1}{\ell} \quad (\text{B.3})$$

liefern die aktuellen Daten keine Information für ein Update.

3. Setze

$$\mu_k = \frac{\underline{\alpha}_k + \bar{\alpha}_k}{2}. \quad (\text{B.4})$$

4. Berechne Werte für das Update des Ellipsoids

- falls $|\mu_k| < \rho$:

$$b_k = 2\ell\mu_k + \frac{1 + \epsilon_k}{\mu_k}, \quad (\text{B.5})$$

$$\tau_k = \frac{b_k - \text{sign}(\mu_k) \sqrt{b_k^2 - 4(\ell + 1)(1 + \ell\epsilon_k)}}{2(r\ell + 1)}, \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_k = \tau_k \left(\tau_k - \frac{1 + \epsilon_k}{\mu_k} \right) + 1, \quad (\text{B.7})$$

$$\delta_k = \frac{\sigma_k}{1 - \frac{\tau_k}{\mu_k}}. \quad (\text{B.8})$$

- falls $|\mu_k| \geq \rho$:

$$\alpha = \max(|\underline{\alpha}_k|, |\bar{\alpha}_k|), \quad (\text{B.9})$$

$$\tau_k = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\sigma_k = \ell\alpha^2, \quad (\text{B.11})$$

$$\delta_k = \frac{r\ell(1 - \alpha^2)}{r\ell - 1}. \quad (\text{B.12})$$

5. Berechne das Update des Ellipsoids

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_{k-1} + \frac{\tau_k \mathbf{P}_{k-1} \Phi_k}{\sqrt{\Phi_k^T \mathbf{P}_{k-1} \Phi_k}}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{P}_k = \delta_k \mathbf{P}_{k-1} + (\sigma_k - \delta_k) \frac{\mathbf{P}_{k-1} \Phi_k \Phi_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\Phi_k^T \mathbf{P}_{k-1} \Phi_k}. \quad (\text{B.14})$$

Dabei entspricht ℓ der Anzahl der Parameter und ρ einer wählbaren Schranke, ab wann $\underline{\alpha}_k$ oder $\bar{\alpha}_k$ als gleich betrachtet werden.

B.2 Zonotop-Parameteridentifikation

Wie das MOVE-Verfahren basiert das Parameteridentifikationsverfahren mit Zonotopen nach [BAC06] auf der Systemdarstellung (3.22) und (3.23). Es handelt sich um ein iteratives Verfahren, weshalb der Regressor Φ zeilenweise mit einem zugehörigen Ausgangswert $[y_k]$ betrachtet wird. Diese k -te Zeile wird nun als Band

$$\mathcal{S}_{\text{Daten},k} = \left\{ \boldsymbol{\vartheta} \mid \left| \Phi_k^T \boldsymbol{\vartheta} - y_k \right| \leq \nu_k \right\} \quad (\text{B.15})$$

im Parameterraum betrachtet, welches den Bereich der mit der Messung verträglichen Parameter beschreibt.

Um dieses Band zu verkleinern wird das *Hilfsband* (engl. support strip)

$$\mathcal{S}_{\text{Zonotop},k} = \left\{ \boldsymbol{\vartheta} \mid q_2 \leq \Phi_k^T \boldsymbol{\vartheta} \leq q_1 \right\}, \quad (\text{B.16})$$

welches zum vorliegenden Parameterzonotop $\mathcal{Z}_k = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}[\mathbf{b}]$ der Ordnung r im aktuellen Zeitpunkt k gehört, benötigt. Dabei berechnen sich die verwendeten Größen gemäß

$$q_1 = \Phi_k^T \mathbf{p} + \left\| \mathbf{H}^T \Phi_k \right\|_1, \quad (\text{B.17})$$

$$q_2 = \Phi_k^T \mathbf{p} - \left\| \mathbf{H}^T \Phi_k \right\|_1. \quad (\text{B.18})$$

Durch bilden der Schnittmenge

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{\text{Daten},k} \cap \mathcal{S}_{\text{Zonotop},k} \quad (\text{B.19})$$

des Hilfsbands mit dem Band der Daten kann letzteres verkleinert werden.

Für den Einschluss der Schnittmenge zwischen dem Zonotop \mathcal{Z}_k und dem Band \mathcal{S}_k kann eine Gruppe von $r + 1$ Zonotopen gebildet werden, welche für $0 \leq j \leq r$ durch

$$\mathcal{Z}_{k+1,j} = \mathbf{v}(j) \oplus \mathbf{T}(j)[\mathbf{b}] \supseteq \mathcal{Z}_k \cap \mathcal{S}_k \quad (\text{B.20})$$

mit

$$\mathbf{v}(j) = \begin{cases} \mathbf{p} + \left(\frac{y_k - \mathbf{P}h_k^T \mathbf{p}}{\Phi_k^T \mathbf{H}_j} \right) \mathbf{H}_j & \text{für } 1 \leq j \leq r \text{ und } \Phi_k^T \mathbf{H}_j \neq 0, \\ \mathbf{p} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{T}(j) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^j & \mathbf{T}_2^j & \dots & \mathbf{T}_r^j \end{pmatrix} & \text{für } 1 \leq j \leq r \text{ und } \Phi_k^T \mathbf{H}_j \neq 0, \\ \mathbf{H} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{T}_i^j = \begin{cases} \mathbf{H}_i - \left(\frac{\mathbf{P}h_k^T \mathbf{H}_i}{\Phi_k^T \mathbf{H}_j} \right) \mathbf{H}_j & \text{für } i \neq j, \\ \left(\frac{\nu_k}{\Phi_k^T \mathbf{H}_j} \right) \mathbf{H}_j & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

gegeben ist. Die $r + 1$ so erhaltenen Zonotope bilden unterschiedliche enge Einschlüsse der Schnittmenge in Gleichung (B.20). Nach [BAC06] kann ein j , welches zum optimal kleinen Volumen des Zonotops führt, jedoch mittels

$$j^* = \arg \min_{0 \leq j \leq r} \det(\mathbf{T}(j)\mathbf{T}(j)^T) \quad (\text{B.24})$$

ausgewählt werden.

Anhang C

Umformung eines Beispielsystems zu einem ARX-Modell höherer Ordnung

In diesem Anhang wird hergeleitet, wie das MIMO-Beispielsystem erster Ordnung aus Abschnitt 4.3.2 zu einem Modell zweiter Ordnung umgeformt werden kann. Ausgangspunkt stellen die Modellgleichungen (4.18)

$$y_1(k) = u_1(k-1) - \frac{1}{2}u_2(k-1) + \frac{8}{10}y_1(k-1), \quad (\text{C.1})$$

$$y_2(k) = 2u_2(k-1) + \frac{9}{10}y_1(k-1) - \frac{1}{2}y_2(k-1) \quad (\text{C.2})$$

des ARX-Modells dar, welche aus Gründen der Vollständigkeit hier erneut angegeben sind.

Gleichung (C.2) wird zunächst nach $y_1(k-1)$ umgestellt:

$$y_1(k-1) = \frac{10}{9} \left(y_2(k) - 2u_2(k-1) + \frac{1}{2}y_2(k-1) \right). \quad (\text{C.3})$$

Diese Gleichung kann nun durch Indexverschiebung um einen Zeitschritt verschoben werden:

$$y_1(k-2) = \frac{10}{9} \left(y_2(k-1) - 2u_2(k-2) + \frac{1}{2}y_2(k-2) \right). \quad (\text{C.4})$$

Genauso wird Gleichung (C.1) um einen Zeitschritt verschoben:

$$y_1(k-1) = u_1(k-2) - \frac{1}{2}u_2(k-2) + \frac{8}{10}y_1(k-2). \quad (\text{C.5})$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seite der Gleichungen (C.5) und (C.3) und zusätzlichem Einsetzen von Gleichung (C.4) kann y_1 eliminiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{10}{9}y_2(k) + \frac{10}{18}y_2(k-1) - \frac{20}{9}u_2(k-1) = \\ \frac{8}{10} \left(\frac{10}{9}y_2(k-1) + \frac{10}{18}y_2(k-2) - \frac{20}{9}u_2(k-2) \right) + u_1(k-2) - \frac{1}{2}u_2(k-2). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Diese Gleichung kann nun nach $y_2(k)$ umgestellt werden, um die Modellgleichung für den zweiten Ausgang zu erhalten.

$$y_2(k) = \frac{9}{10}u_1(k-2) - \frac{41}{20}u_2(k-2) + \frac{4}{10}y_2(k-2) + 2u_2(k-1) + \frac{3}{10}y_2(k-1) \quad (\text{C.7})$$

Um nun den Ausgang y_1 in Abhängigkeit dieses Modells auszudrücken, wird Gleichung (C.1) nach $y_1(k-1)$ umgestellt:

$$y_1(k-1) = \frac{10}{8}y_1(k) - \frac{10}{8}u_1(k-1) + \frac{5}{8}u_2(k-1). \quad (\text{C.8})$$

Dies wiederum kann in Gleichung (C.5) eingesetzt und nach $y_1(k)$ umgestellt werden:

$$y_1(k) = u_1(k-1) - \frac{1}{2}u_2(k-1) + \frac{64}{100}y_1(k-2) + \frac{8}{10}u_1(k-2) - \frac{8}{20}u_2(k-2) \quad (\text{C.9})$$

Durch Einsetzen von Gleichung (C.4) in Gleichung (C.9) werden die verzögerten Ausgangswerte von y_1 eliminiert:

$$\begin{aligned} y_1(k) = u_1(k-1) - \frac{1}{2}u_2(k-1) + \frac{64}{100} \left(\frac{10}{9}y_2(k-1) + \frac{10}{18}y_2(k-2) - \frac{20}{9}u_2(k-2) \right) \\ + \frac{8}{10}u_1(k-2) - \frac{8}{10}u_2(k-2) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Daraus folgt schließlich die zweite Modellgleichung

$$\begin{aligned} y_1(k) = \frac{8}{10}u_1(k-2) - \frac{82}{45}u_2(k-2) + \frac{16}{45}y_2(k-2) + u_1(k-1) \\ - \frac{1}{2}u_2(k-1) + \frac{32}{45}y_2(k-1). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Die beiden Gleichungen (C.7) und (C.11) bilden ein ARX-Modell zweiter Ordnung, welches dasselbe System wie die Gleichungen (C.1) und (C.2) beschreibt.

Anhang D

Parameter der betrachteten Simulationsbeispiele

D.1 Simulationseinstellungen der Beispielsysteme

Bezeichnung	MISO-System	MIMO-System 1
n_{ARX}	3	1
n_y	1	2
n_u	2	2
Durchgriff	nein/ja	nein
Gleichung der Systemparameter	(4.9)	(4.18)
Anregungssignal	WGR, $\sigma^2 = 1$	WGR, $\sigma^2 = 1$
Relative Unsicherheit	1 %	1 %
y_Δ	0,159	0,065 bzw. 0,085
u_Δ	0,035 bzw. 0,035	0,036 bzw. 0,033
Bezeichnung	MIMO-System 2	instabiles System
n_{ARX}	2	2
n_y	2	2
n_u	3	2
Durchgriff	ja	ja
Gleichung der Systemparameter	(4.22)	(4.33)
Anregungssignal	WGR, $\sigma^2 = 1$	WGR, $\sigma^2 = 1$
Relative Unsicherheit	1 ‰	1 ‰
$y_\Delta \times 10^{-3}$	6,6 bzw. 12,0	19,6 bzw. 4,6
$u_\Delta \times 10^{-3}$	3,2; 3,4 bzw. 3,4	8,7 bzw. 10,9

Tabelle D.1: Simulationseinstellungen der Beispielsysteme

D.2 Ellipsoid des MISO-Beispiels

Die Parameter des Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{c}, \mathbf{P})$ bei der Identifikation des MISO-Beispielsystems aus Abschnitt 5.1.3 lauten:

$$\mathbf{c}^T = (0,31 \quad -0,11 \quad -1,01 \quad -0,08 \quad 0,19 \quad -1,01 \quad 0,13 \quad -0,10 \quad -1,01), \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,00 & -0,01 & 0,05 & -0,05 & -0,04 & -0,01 & 0,02 & -0,03 \\ 0,00 & 0,72 & 0,03 & 0,07 & -0,04 & 0,06 & 0,13 & 0,08 & 0,05 \\ -0,01 & 0,03 & 0,04 & 0,03 & -0,04 & 0,03 & -0,01 & 0,00 & 0,01 \\ 0,05 & 0,07 & 0,03 & 0,81 & -0,07 & 0,03 & -0,01 & -0,09 & -0,01 \\ -0,05 & -0,04 & -0,04 & -0,07 & 0,76 & -0,01 & 0,04 & 0,00 & 0,01 \\ -0,04 & 0,06 & 0,03 & 0,03 & -0,01 & 0,06 & 0,01 & -0,03 & 0,03 \\ -0,01 & 0,13 & -0,01 & -0,01 & 0,04 & 0,01 & 0,68 & 0,01 & 0,00 \\ 0,02 & 0,08 & 0,00 & -0,09 & 0,00 & -0,03 & 0,01 & 0,72 & 0,00 \\ -0,03 & 0,05 & 0,01 & -0,01 & 0,01 & 0,03 & 0,00 & 0,00 & 0,04 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Dies stellt einen Einschluss des Parametervektors

$$\boldsymbol{\vartheta} = (\mathbf{b}_3^T \quad a_3 \quad \mathbf{b}_2^T \quad a_2 \quad \mathbf{b}_1^T \quad a_1)^T \quad (\text{D.3})$$

des Systems in Form (2.10) dar.

D.3 Zonotop des ersten MIMO-Beispiels

Die Parameteridentifikation des ersten MIMO-Beispielsystems aus Abschnitt 5.1.3 mittels Zonotopen liefert für die Parameter jedes Ausgangs einen eigenen Parameter-einschluss. Die Parametermatrix des Systems in Form (2.11) wird dadurch durch zwei Zonotope

$$\Theta = \begin{pmatrix} b_{1,1,1} & b_{2,1,1} \\ b_{1,2,1} & b_{2,2,1} \\ a_{1,1,1} & a_{2,1,1} \\ a_{1,2,1} & a_{2,2,1} \end{pmatrix} \subseteq (\mathcal{Z}(\mathbf{p}_1, \mathbf{H}_1) \quad \mathcal{Z}(\mathbf{p}_2, \mathbf{H}_2)) \quad (\text{D.4})$$

spaltenweise eingeschlossen, wobei die Indizierung der Parameter entsprechend Abschnitt 2.1.3 angegeben ist. Die Parameter der Zonotope lauten:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1,00 \\ -0,50 \\ 0,80 \\ -0,01 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 2,00 \\ 0,91 \\ -0,50 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,04 & -0,01 & -0,01 \\ 0,03 & -0,02 & 0,06 & -0,02 \\ -0,01 & 0,00 & 0,00 & -0,02 \\ -0,01 & 0,02 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,03 & 0,02 & -0,01 \\ 0,04 & 0,05 & -0,03 & -0,02 \\ 0,02 & 0,03 & 0,04 & 0,03 \\ -0,03 & 0,00 & 0,01 & -0,03 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

D.4 Zustandsraumdarstellung des zweiten MIMO-Beispiels

Die in Gleichung (5.17) angegebenen Parameter des zweiten MIMO-ARX-Systems können, wie in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, in ein Zustandsraummodell umgeformt werden. Die so gewonnenen Parametermatrizen sind durch

$$[\Phi] = \begin{pmatrix} 0 & [-0,52; -0,48] & 0 & 0 \\ 1 & [0,78; 0,82] & 0 & [-0,01; 0,01] \\ 0 & [0,98; 1,02] & 0 & 0 \\ 0 & [-0,03; 0,02] & 1 & [0,49; 0,51] \end{pmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} [-0,05; 0,06] [-0,56; -0,44] [0,97; 1,04] \\ [-1,04; -0,96] [-0,27; -0,13] [-0,04; 0,04] \\ [0,92; 1,08] [0,91; 1,09] [-0,05; 0,05] \\ [-2,05; -1,95] [0,91; 1,08] [0,10; 0,20] \end{pmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} [-0,02; 0,02] [0,98; 1,02] [-0,02; 0,02] \\ [-0,03; 0,03] [-0,03; 0,03] [0,27; 0,33] \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

gegeben.

Bei der Darstellung der Pole des Systems in Abbildung 5.6 ist ein Pol im Ursprung ohne Unsicherheit eingezeichnet. Die Ursache hierfür ist, dass nicht alle Parameter im AR-Teil des ARX-Modell ungleich null sind und somit nicht zur Beschreibung des Systemverhaltens benötigt werden. Durch Umformung in den Zustandsraum wird dies im Folgenden verdeutlicht.

Die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene Umformung führt allgemein für ein Modell der Ordnung $n_{\text{ARX}} = 2$ mit zwei Eingängen auf die Systemmatrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,1,2} & 0 & -a_{1,2,2} \\ 1 & -a_{1,1,1} & 0 & -a_{1,2,1} \\ 0 & -a_{2,1,2} & 0 & -a_{2,2,2} \\ 0 & -a_{2,1,1} & 1 & -a_{2,2,1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

im Zustandsraum, wobei hier und im Folgenden zur besseren Lesbarkeit auf die Darstellung von Intervallparametern verzichtet wird.

Zur Bestimmung der Pole des Systems wird die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}
 0 = & \lambda^4 + \lambda^3(a_{1,1,1} + a_{2,2,1}) + \lambda^2(a_{1,1,2} + a_{2,2,2} + a_{1,1,1} \cdot a_{2,2,1} - a_{1,2,1} \cdot a_{2,1,1}) \\
 & + \lambda(a_{1,1,1} \cdot a_{2,2,2} + a_{1,1,2} \cdot a_{2,2,1} - a_{1,2,1} \cdot a_{2,1,2} - a_{1,2,2} \cdot a_{2,1,1}) \\
 & + a_{1,1,2} \cdot a_{2,2,2} - a_{1,2,2} \cdot a_{2,1,2}
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

der Eigenwerte λ der Matrix $(\lambda \mathbf{I} - \Phi)$ genutzt. Im Fall des betrachteten Beispielsystems mit den Parametern (5.17) wurden bei der Identifikation die Parameter $a_{1,2,2}$ und $a_{2,2,2}$ gleich Null gesetzt, da diese Parameter zur Beschreibung des Systemverhaltens nicht erforderlich sind. Hierdurch vereinfacht sich Gleichung (D.13) zu

$$\begin{aligned}
 0 = & \lambda (\lambda^3 + \lambda^2(a_{1,1,1} + a_{2,2,1}) + \lambda(a_{1,1,2} + a_{1,1,1} \cdot a_{2,2,1} - a_{1,2,1} \cdot a_{2,1,1}) \\
 & + a_{1,1,2} \cdot a_{2,2,1} - a_{1,2,1} \cdot a_{2,1,2}).
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

Dabei kann ein λ ausgeklammert werden, was einem reellwertigen Pol bei Null entspricht.

D.5 Modellparameter des instabilen Beispiels

Die Parametermatrizen eines ARX-Modells des instabilen Systems aus Abschnitt 5.1.3 bei Identifikation mit dem rekursiven IGS-Verfahren aus Abschnitt 5.1.2 lauten

$$[\mathbf{A}_1] = \left(\begin{array}{l} [\ 0,15; \ 0,25] [-0,66; -0,34] \\ [-0,02; \ 0,02] [\ 1,45; \ 1,56] \end{array} \right), \quad (\text{D.15a})$$

$$[\mathbf{A}_2] = \left(\begin{array}{l} [-0,63; -0,57] \quad 0 \\ [-0,01; \ 0,01] \quad 0 \end{array} \right), \quad (\text{D.15b})$$

$$[\mathbf{B}_0] = \left(\begin{array}{l} [\ 0,05; \ 0,15] [\ 0,96; \ 1,04] \\ [\ 0,98; \ 1,02] [\ 0,19; \ 0,22] \end{array} \right), \quad (\text{D.15c})$$

$$[\mathbf{B}_1] = \left(\begin{array}{l} [\ 1,91; \ 2,06] [-0,17; -0,04] \\ [-0,12; -0,07] [-0,22; -0,18] \end{array} \right), \quad (\text{D.15d})$$

$$[\mathbf{B}_2] = \left(\begin{array}{l} [\ 0,34; \ 0,45] [\ 0,05; \ 0,15] \\ [-0,02; \ 0,02] [-0,02; \ 0,02] \end{array} \right). \quad (\text{D.15e})$$

Für das selbe Beispielsystem liefert die Identifikation mittels linearer Optimierung nach Abschnitt 3.2.2 die Parametermatrizen

$$[\mathbf{A}_1] = \left(\begin{array}{l} [\ 0,19; \ 0,22] [-0,56; -0,44] \\ [-0,01; \ 0,01] [\ 1,48; \ 1,52] \end{array} \right), \quad (\text{D.16a})$$

$$[\mathbf{A}_2] = \left(\begin{array}{l} [-0,61; -0,59] \quad 0 \\ [\ 0,00; \ 0,00] \quad 0 \end{array} \right), \quad (\text{D.16b})$$

$$[\mathbf{B}_0] = \left(\begin{array}{l} [\ 0,08; \ 0,12] [\ 0,98; \ 1,02] \\ [\ 0,99; \ 1,01] [\ 0,20; \ 0,21] \end{array} \right), \quad (\text{D.16c})$$

$$[\mathbf{B}_1] = \left(\begin{array}{l} [\ 1,97; \ 2,03] [-0,12; -0,08] \\ [-0,11; -0,09] [-0,21; -0,19] \end{array} \right), \quad (\text{D.16d})$$

$$[\mathbf{B}_2] = \left(\begin{array}{l} [\ 0,38; \ 0,42] [\ 0,08; \ 0,12] \\ [-0,01; \ 0,01] [-0,01; \ 0,01] \end{array} \right). \quad (\text{D.16e})$$

Anhang E

Betreute studentische Arbeiten

Braunagel, Christian: *Identifikation von Systemen mit unsicheren Parametern*. Masterarbeit, Universität Ulm, 2013.

Keller, Henrik: *Modellierung der Temperaturverteilung im Rotor einer Asynchronmaschine*. Masterarbeit, Universität Ulm, 2015.

Kleiner, Michael: *Regelung eines inversen Pendels*. Bachelorarbeit, Universität Ulm, 2011.

Mühlbacher, Johannes: *Thermische Modellierung einer Asynchronmaschine mittels verallgemeinerter Netzwerke*. Bachelorarbeit, Universität Ulm, 2014.

Seifert, Dominik Thomas: *Thermische Modellierung eines Asynchronmotors mit Hilfe der Finite Elemente Methode*. Bachelorarbeit, Universität Ulm, 2014.

Anhang F

Eigene Veröffentlichungen

Teile der vorliegenden Dissertation wurden im Rahmen von Vorveröffentlichungen publiziert:

Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Black-Box-Modellierung mit unsicheren Parametern aus Messdaten mit unbekanntem, aber beschränkten Fehlern*. In: Sawodny, Oliver und Adamy, Jürgen (Herausgeber): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30 "Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik"*, Seiten 157–167. VDI/VDE-GMA, Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Darmstadt, 2013.

Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Interval System Identification for MIMO ARX Models of Minimal Order*. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Seiten 1774–1779, 2014.

Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *MIMO Order and State-Space Model Identification from Interval Data*. In: *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, Seiten 134–139, 2014.

Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Black-box modeling with uncertain parameters from measurement data with unknown, but bounded errors*. In: *at - Automatisierungstechnik*, Band 62, Nr. 9, Seiten 607–618, 2014.

Weitere Veröffentlichungen im Rahmen der Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Ulm:

Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Rotor Temperature Modeling of an Induction Motor using Subspace Identification*. In: *17th IFAC Symposium on System Identification, SYSID*, Seiten 847–852, 2015.

Abkürzungsverzeichnis

4SID	Subspace-Identification	36
AR	Auto Regressive	8
ARMA	Auto Regressive Moving Average	8
ARMAX	Auto Regressive Moving Average with eXogenous input	8
ARX	Auto Regressive with eXogenous input	8
BNF	Beobachtungsnormalform	12
EIV	Errors-In-Variables	33
ESR	Equivalent Series Resistance	133
IGS	Intervall-Gleichungssystem	40
IO	Input-Output	7
IV	Instrumental Variables	34
LMI	Linear Matrix Inequality	52
LPV	Linear Parameter Varying	53
LS	Least Squares	32
LTI	Linear Time-Invariant	6
MA	Moving Average	8
MIMO	Multiple Input, Multiple Output	6
MISO	Multiple Input, Single Output	6
MOVE	Modified Optimal Volume Ellipsoid	50
OE	Output Error	8
PDF	Probability Density Function	17
RLS	Recursive Least Squares	34
RNF	Regelungsnormalform	12

SIMO	Single Input, Multiple Output	6
SISO	Single Input, Single Output	6
SIVIA	Set Inversion Via Interval Analysis	47
SVD	Singular Value Decomposition	33
UBB	Unknown But Bounded	18
WGR	Weißes Gaußsches Rauschen	32

Symbolverzeichnis

Notation

a	Skalar
\mathbf{a}	Vektor
\mathbf{A}	Matrix
\mathbf{A}^T	Transponierte Matrix
\mathbf{A}^{-1}	Inverse Matrix
\mathbf{A}^\dagger	Pseudo-Inverse Matrix

Zahlenräume

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler Raum der reellen Zahlen
\mathbb{IR}	Menge der reellen Intervalle
\mathbb{IR}^n	n -dimensionaler Raum der reellen Intervalle

Mengen

$[a]$	Intervall
\underline{a}	Untere Intervallschranke, Infimum
\bar{a}	Obere Intervallschranke, Supremum
a_m	Intervallmittelpunkt
a_Δ	Intervallradius
\mathcal{E}	Ellipsoid
\mathcal{P}	Polytop
\mathcal{Z}	Zonotop
\cap	Schnittmenge
\cup	Vereinigungsmenge
\emptyset	Leere Menge

Modelle und Signale

A	Parametermatrix des autoregressiven Anteils eines ARX-Modells
B	Parametermatrix der Eingangsabhängigkeit eines ARX-Modells
Φ	Systemmatrix eines Zustandsraummodells
H	Eingangsmatrix eines Zustandsraummodells
C	Ausgangsmatrix eines Zustandsraummodells
D	Durchgriffmatrix eines Zustandsraummodells
u	Eingangsvektor
y	Ausgangsvektor
\hat{y}	Prädizierter Ausgangsvektor
$\hat{y}(k k-1)$	Einschritt-Prädiktion des Ausgangsvektor
x	Zustandsvektor
n_u	Anzahl der Systemeingänge
n_y	Anzahl der Systemausgänge
n	Ordnung eines Zustandsraummodells
n_{ARX}	Ordnung eines ARX-Modells

Ordnungsbestimmung

Z	Eatenmatrix des Systems
Z^*	Eatenmatrix des Systems ohne Durchgriff
\tilde{Z}	Temporäre Datenmatrix des Systems
W_i	Eatenmatrix des i -ten Ausgangs
α	Hilfsgröße, Anzahl der zu Z hinzugefügten Spalten
\tilde{U}_q	Temporäre Datenstruktur der Eingangssignale
$\tilde{y}_{q,i}$	Temporäre Datenstruktur des i -ten Ausgangs
Ω_p	Kombinationsmatrix der Rekursionstiefe p

Parameteridentifikation

Θ	Parametermatrix, Lösung eines linearen Gleichungssystems
ϑ	Parametervektor, Lösung eines linearen Gleichungssystems
$\tilde{\Theta}$	Reduzierte Parametermatrix
ℓ	Anzahl der Parameter in ϑ
m	Anzahl der Gleichungen (Zeilen) im Gleichungssystem
N	Anzahl der gemessenen Datenpunkte

Literaturverzeichnis

- [ABC05] Alamo, Teodoro; Bravo, José Manuel und Camacho, Eduardo F.: *Guaranteed state estimation by zonotopes*. In: *Automatica*, Band 41, Nr. 6, Seiten 1035–1043, 2005.
- [Alt10] Althoff, Matthias: *Reachability Analysis and its Application to the Safety Assessment of Autonomous Cars*. Dissertation, Technische Universität München, 2010.
- [BAC06] Bravo, José Manuel; Alamo, Teodoro und Camacho, Eduardo F.: *Bounded error identification of systems with time-varying parameters*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 51, Nr. 7, Seiten 1144–1150, 2006.
- [Bee06] Beelitz, Thomas: *Effiziente Methoden zum Verifizierten Lösen von Optimierungsaufgaben und Nichtlinearen Gleichungssystemen*. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, 2006.
- [BG99] Belforte, Gustavo und Gay, Paolo: *Hammerstein model identification with set membership errors*. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Band 1, Seiten 592–597, 1999.
- [BMRB07] Benothman, Kamel; Maquin, Didier; Ragot, José und Benrejeb, Mohamed: *Diagnosis of uncertain linear systems: an interval approach*. In: *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, Band 1, Nr. 2, Seiten 136–154, 2007.
- [Boo15] Boost: *BOOST C++ Libraries*. 2015. URL: <http://www.boost.org> (zuletzt besucht am 12. 10. 2015).
- [Bou10] Bourgeot, Jean-Matthieu: *Fast algebraic fault diagnosis for the electrolytic filter capacitor of buck converter*. In: *Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, Seiten 227–232, 2010.
- [BPB10] Blesa, Joaquim; Puig, Vicenç und Bolea, Yolanda: *Fault detection using interval LPV models in an open-flow canal*. In: *Control Engineering Practice*, Band 18, Nr. 5, Seiten 460–470, 2010.

- [BPS09] Blesa, Joaquim; Puig, Vicenç und Saludes, Jordi: *Identification for Passive Robust Fault Detection of LPV Systems using Zonotopes*. In: *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Seiten 1198–1203, 2009.
- [BSA⁺14a] Ben Chabane, Sofiane; Stoica Maniu, Cristina; Alamo, Teodoro; Camacho, Eduardo F. und Dumur, Didier: *Improved set-membership estimation approach based on zonotopes and ellipsoids*. In: *2014 European Control Conference (ECC)*, Seiten 993–998, 2014.
- [BSA⁺14b] Ben Chabane, Sofiane; Stoica Maniu, Cristina; Alamo, Teodoro; Camacho, Eduardo F. und Dumur, Didier: *Sensor fault detection and diagnosis using zonotopic set-membership estimation*. In: *22nd Mediterranean Conference of Control and Automation (MED)*, Seiten 261–266, 2014.
- [Buc10] Buchholz, Michael: *Subspace-Identification zur Modellierung von PEM-Brennstoffzellen-Stacks*. Aus der Reihe *Schriften des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme, Karlsruher Institut für Technologie*. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe, 2010.
- [CD95] Chang, Michael und Davison, Edward J.: *Robust adaptive stabilization of unknown MIMO systems using switching control*. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. Band 2, Seiten 1732–1737, 1995.
- [Cer96] Cerone, Vito: *Errors-in-Variables Models in Parameter Bounding*. In: Milanese, Mario; Norton, John; Piet-Lahanier, Hélène und Walter, Éric (Herausgeber): *Bounding Approaches to System Identification*, Seiten 289–306, Springer, New York, 1996.
- [CGV11] Casini, Marco; Garulli, Andrea und Vicino, Antonio: *Set-membership identification of ARX models with quantized measurements*. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Seiten 2806–2811, 2011.
- [CGV12] Casini, Marco; Garulli, Andrea und Vicino, Antonio: *Bounding non-convex feasible sets in set membership identification: OE and ARX models with quantized information*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, Band 45, Nr. 16, Seiten 1191–1196, 2012.
- [Che91] Cheung, Man-Fung: *On optimal algorithms for parameter set estimation*. Dissertation, The Ohio State University, 1991.
- [CLPR14] Cerone, Vito; Lasserre, Jean-Bernard; Piga, Dario und Regruto, Diego: *A Unified Framework for Solving a General Class of Conditional and Robust Set-Membership Estimation Problems*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Band 59, Nr. 11, Seiten 2897–2909, 2014.

- [CMG⁺06] Ceccarelli, Nicola; Marco, Mauro; Garulli, Andrea; Giannitrapani, Antonio und Vicino, Antonio: *Set Membership Localization and Map Building for Mobile Robots*. In: *Current Trends in Nonlinear Systems and Control: In Honor of Petar Kokotović and Turi Nicosia*, Menini, Laura; Zaccarian, Luca und Abdallah, Chaouki T. (Herausgeber), Seiten 289–308, 2006.
- [CPR11a] Cerone, Vito; Piga, Dario und Regruto, Diego: *Set-membership identification of Hammerstein-Wiener systems*. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Seiten 2819–2824, 2011.
- [CPR11b] Cerone, Vito; Piga, Dario und Regruto, Diego: *Enforcing stability constraints in set-membership identification of linear dynamic systems*. In: *Automatica*, Band 47, Nr. 11, Seiten 2488–2494, 2011.
- [CPR12] Cerone, Vito; Piga, Dario und Regruto, Diego: *Polytopic outer approximations of semialgebraic sets*. In: *51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, Seiten 7793–7798, 2012.
- [CPRT12] Cerone, Vito; Piga, Dario; Regruto, Diego und Tóth, Roland: *Minimal LPV state-space realization driven set-membership identification*. In: *American Control Conference (ACC)*, Seiten 3421–3426, 2012.
- [CR15] Cerone, Vito und Regruto, Diego: *Handling Big Data in Set-Membership Identification through a Sparse Optimization Approach*. In: *17th IFAC Symposium on System Identification, SYSID*, Seiten 1272–1278, 2015.
- [Cyn16] Cynergy3 Components Ltd: *Ultrasonic Flow Meter UF08B*. 2016. URL: <http://www.cynergy3.com/product/ultrasonic-flowmeter-04-8-1min> (zuletzt besucht am 18. 11. 2016).
- [CYP91] Cheung, Man-Fung; Yurkovich, Stephen und Passino, Kevin M.: *An optimal volume ellipsoid algorithm for parameter set estimation*. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 969–974, 1991.
- [ERZ13] Efimov, Denis; Raïssi, Tarek und Zolghadri, Ali: *Set Adaptive Observers for Linear Parameter-Varying Systems: Application to Fault Detection*. In: *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Band 136, Nr. 2, 2013.
- [FRL11] Farhadsefat, Raena; Rohn, Jiří und Lotfi, Taher: *Norms of Interval Matrices*. Technischer Bericht Nr. V-1122. Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic, 2011.

- [GD12] Gu, Ya und Ding, Ruifeng: *Observable state space realizations for multivariable systems*. In: *Computers & Mathematics with Applications*, Band 63, Nr. 9, Seiten 1389–1399, 2012.
- [GPIW06] Guerra, Pedro; Puig, Vicenç; Ingimundarson, Ari und Witczak, Marcin: *Robust fault detection with unknown input set-membership state estimators and interval models using Zonotopes*. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. Band 6, Seiten 1234–1239, 2006.
- [GS92] Gassman, James Matthew und StephenYurkovich: *An ellipsoid algorithm for parameter set estimation*. In: *First IEEE Conference on Control Applications*, Seiten 835–840, 1992.
- [Har02] Hargreaves, Gareth I.: *Interval Analysis in MATLAB*. Numerische Mathematik Bericht Nr. 416. Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester, 2002.
- [HGT⁺12] Herrero, Pau; Georgiou, Pantelis; Toumazou, Christofer; Delaunay, Benoît und Jaulin, Luc: *An Efficient Implementation of SIVIA Algorithm in a High-Level Numerical Programming Language*. In: *Reliable computing*, Seiten 239–251, 2012.
- [HH13] Horáček, Jaroslav und Hladík, Milan: *Computing Enclosures of Over-determined Interval Linear Systems*. In: *Reliable Computing*, Band 19, Nr. 1, Seiten 142–155, 2013.
- [HK04] Hofschuster, Werner und Krämer, Walter: *C-XSC 2.0 - A C++ Library for Extended Scientific Computing*. In: Alt, René; Frommer, Andreas; Kearfott, R.Baker und Luther, Wolfram (Herausgeber): *Numerical Software with Result Verification*, Band 2991. Aus der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 15–35, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [HK88] Harada, Koosuke und Katsuki, Akihiko: *Deterioration diagnosis of electrolytic capacitor in a buck-boost converter*. In: *19th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, Seiten 1101–1104, 1988.
- [HKJM13] Herceg, Martin; Kvasnica, Michal; Jones, Colin N. und Morari, Manfred: *Multi-Parametric Toolbox 3.0*. In: *2013 European Control Conference (ECC)*, Seiten 502–510, 2013.
- [Hla15] Hladík, Milan: *AE solutions and AE solvability to general interval linear systems*. In: *Linear Algebra and its Applications*, Band 465, Seiten 221–238, 2015.
- [IM11] Isermann, Rolf und Münchhof, Marco: *Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications*. Springer, Berlin Heidelberg, 2011.

- [Ins08] Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.: *IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*. In: *IEEE Std 754-2008*, Seiten 1–70, 2008.
- [JKDW01] Jaulin, Luc; Kieffer, Michael; Didrit, Olivier und Walter, Éric: *Applied Interval Analysis. With Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer, London, 2001.
- [JW93a] Jaulin, Luc und Walter, Éric: *Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation*. In: *Automatica*, Band 29, Nr. 4, Seiten 1053–1064, 1993.
- [JW93b] Jaulin, Luc und Walter, Éric: *Guaranteed nonlinear parameter estimation from bounded-error data via interval analysis*. In: *Mathematics and Computers in Simulation*, Band 35, Nr. 2, Seiten 123–137, 1993.
- [Kál60] Kálmán, Rudolf Emil: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. In: *Journal of Basic Engineering*, Band 82, Nr. 1, Seiten 35–45, 1960.
- [KCM11] van Kampen, Erik-Jan; Chu, Q.P. und Mulder, J.A.: *Interval Analysis as a System Identification Tool*. In: Holzapfel, Florian und Theil, Stephan (Herausgeber): *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control*, Seiten 333–343, Springer, Berlin Heidelberg, 2011.
- [KLB94] Keel, Lee H.; Lew, Jiann-Shiun und Bhattacharyya, Shankar P.: *System identification using interval dynamic models*. In: *American Control Conference*. Band 2, Seiten 1537–1542, 1994.
- [KLN93] Kreinovich, Vladik; Lakeyev, Anatoly V. und Noskov, Sergey I.: *Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard)*. In: *Interval Computations*, Band 1, Seiten 6–14, 1993.
- [Knü94] Knüppel, Olaf: *PROFIL/BIAS—A fast interval library*. In: *Computing*, Band 53, Nr. 3–4, Seiten 277–287, 1994.
- [Kra69] Krawczyk, Rudolf: *Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken*. In: *Computing*, Band 4, Nr. 3, Seiten 187–201, 1969.
- [KV06a] Kurzhanskiy, Alex A. und Varaiya, Pravin: *Ellipsoidal Toolbox*. Technischer Bericht Nr. UCB/EECS-2006-46. EECS Department, University of California, Berkeley, 2006.
- [KV06b] Kurzhanskiy, Alex A. und Varaiya, Pravin: *Ellipsoidal Toolbox (ET)*. In: *45th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1498–1503, 2006.
- [KV97] Kurzhanskiĭ, Alexander B. und Vályi, István: *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Aus der Reihe *Systems & Control: Foundations & Applications*. Birkhäuser Basel, 1997.

- [Lju99] Ljung, Lennart: *System Identification: Theory for the User*. 2. Auflage, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.
- [LSA⁺13] Le, Vu Tuan Hieu; Stoica, Cristina Nicoleta; Alamo, Teodoro; Camacho, Eduardo F. und Dumur, Didier: *Zonotope-based set-membership estimation for Multi-Output uncertain systems*. In: *2013 IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC)*, Seiten 212–217, 2013.
- [Lun08a] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 1. Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 7. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [Lun08b] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 2. Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 5. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [May09] Mayer, Günter: *Direct methods for linear systems with inexact input data*. In: *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Band 26, Nr. 2–3, Seiten 279–296, 2009.
- [MH07] Markovsky, Ivan und Huffel, Sabine Van: *Overview of total least-squares methods*. In: *Signal Processing*, Band 87, Nr. 10, Seiten 2283–2302, 2007.
- [MKC09] Moore, Ramon Edgar; Kearfott, Ralph Baker und Cloud, Michael J.: *Introduction to Interval Analysis*. Society for Industrial und Applied Mathematics, 2009.
- [MNPW96] Milanese, Mario; Norton, John; Piet-Lahanier, Hélène und Walter, Éric (Herausgeber): *Bounding approaches to system identification*. Plenum Press, 1996.
- [Moo62] Moore, Ramon Edgar: *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*. Veröffentlicht als Applied Mathematics and Statistics Laboratories Technical Report No. 25. Dissertation, Stanford University, 1962.
- [Moo66] Moore, Ramon Edgar: *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [MPB12] Montes de Oca, Saúl; Puig, Vicenç und Blesa, Joaquim: *Robust fault detection based on adaptive threshold generation using interval LPV observers*. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Band 26, Nr. 3, Seiten 258–283, 2012.
- [MPE08] Meseguer, Jordi; Puig, Vicenç und Escobet, Teresa: *Robust Fault Detection Linear Interval Observers Avoiding the Wrapping Effect*. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Band 17, Seiten 11570–11575, 2008.

- [MRT15] Maïga, Moussa; Ramdani, Nacim und Travé-Massuyès, Louise: *Robust fault detection in hybrid systems using set-membership parameter estimation*. In: *9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Seiten 296–301, 2015.
- [MV91] Milanese, Mario und Vicino, Antonio: *Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty: An overview*. In: *Automatica*, Band 27, Nr. 6, Seiten 997–1009, 1991.
- [MY59] Moore, Ramon Edgar und Yang, C. T.: *Interval analysis I*. Technisches Dokument LMSD285875. Lockheed Missiles and Space Company, 1959.
- [Nel01] Nelles, Oliver: *Nonlinear System Identification*. Springer, Berlin Heidelberg, 2001.
- [Neu93] Neumaier, Arnold: *The Wrapping Effect, Ellipsoid Arithmetic, Stability and Confidence Regions*. In: Albrecht, Rudolf; Alefeld, Götz und Stetter, Hans Jörg (Herausgeber): *Validation Numerics*, Band 9. Aus der Reihe *Computing Supplementum*, Seiten 175–190, Springer, Vienna, 1993.
- [Neu99] Neumaier, Arnold: *A Simple Derivation of the Hansen-Blikk-Rohn-Ning-Kearfott Enclosure for Linear Interval Equations*. In: *Reliable Computing*, Band 5, Nr. 2, Seiten 131–136, 1999.
- [OP64] Oettli, Werner und Prager, William: *Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides*. In: *Numerische Mathematik*, Band 6, Nr. 1, Seiten 405–409, 1964.
- [PIT06] Puig, Vicenç; Ingimundarson, Ari und Tornil, Sebastián: *Robust fault detection using inverse images of interval functions*. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. Band 6, Seiten 1210–1215, 2006.
- [Pla07] Planchon, Philippe: *Guaranteed Diagnosis of Uncertain Linear Systems Using State Set Observation*. Logos-Verlag, Berlin, 2007.
- [PNDW04] Polyak, Boris T.; Nazin, Sergey A.; Durieu, Cécile und Walter, Éric: *Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty*. In: *Automatica*, Band 40, Nr. 7, Seiten 1171–1179, 2004.
- [Pop06] Popova, Evgenija D.: *Improved Solution Enclosures for Over- and Underdetermined Interval Linear Systems*. In: Lirkov, Ivan; Margenov, Svetozar und Waśniewski, Jerzy (Herausgeber): *Large-Scale Scientific Computing*, Band 3743. Aus der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 305–312, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.

- [PPG11] Pouliquen, Mathieu; Pigeon, Eric und Gehan, Olivier: *Output error identification for multi-input multi-output systems with bounded disturbances*. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Seiten 7200–7205, 2011.
- [Pui06] Puig, Vicenç: *Passive robust fault detection using a forward-backward test*. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. Band 6, Seiten 1044–1049, 2006.
- [RBF13] Rivero, Stefano; Battocchio, Alberto und Ferrari-Trecate, Giancarlo: *PnPMPC toolbox*. 2013. URL: <http://sisdin.unipv.it/pnmpc/pnmpc.php> (zuletzt besucht am 12. 10. 2015).
- [RK95] Rohn, Jiří und Kreinovich, Vladik: *Computing Exact Componentwise Bounds on Solutions of Linear Systems with Interval Data is NP-Hard*. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Band 16, Nr. 2, Seiten 415–420, 1995.
- [Roh12] Rohn, Jiří: *A Handbook of Results on Interval Linear Problems*. Technischer Bericht Nr. V-1163. Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic, 2012.
- [Roh89] Rohn, Jiří: *Systems of linear interval equations*. In: *Linear Algebra and its Applications*, Band 126, Seiten 39–78, 1989.
- [Roh95] Rohn, Jiří: *Enclosing Solutions of Overdetermined Systems of Linear Interval Equations*. Technischer Bericht Nr. 643. Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic, 1995.
- [Roh96] Rohn, Jiří: *Enclosing solutions of overdetermined systems of linear interval equations*. In: *Reliable Computing*, Band 2, Seiten 167–171, 1996.
- [RSA16] Rauh, Andreas; Senkel, Luise und Aschemann, Harald: *Verified Parameter Identification for Dynamic Systems with Non-Smooth Right-Hand Sides*. In: *Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics: 16th International Symposium, SCAN 2014, Würzburg, Germany, September 21-26, 2014. Revised Selected Papers*. Hrsg. von Nehmeier, Marco; Wolff von Gudenberg, Jürgen und Tucker, Warwick. Springer International Publishing, 2016, Seiten 236–246.
- [RST02] Ros, Lluís; Sabater, Assumpta und Thomas, Federico: *An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion*. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, Band 32, Nr. 4, Seiten 430–442, 2002.

- [Rum12] Rump, Siegfried M.: *Verified Bounds for Least Squares Problems and Underdetermined Linear Systems*. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Band 33, Nr. 1, Seiten 130–148, 2012.
- [Rum13] Rump, Siegfried M.: *Accurate solution of dense linear systems, Part II: Algorithms using directed rounding*. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Band 242, Seiten 185–212, 2013.
- [Rum83] Rump, Siegfried M.: *Solving algebraic problems with high accuracy*. In: Kulisch, Ulrich W. und Miranker, Willard L. (Herausgeber): *Proceedings of the symposium on a new approach to scientific computation*, Seiten 51–120. *Notes and Reports in Computer Science and Applied Mathematics*, Academic Press Professional, Inc., IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, USA, 1983.
- [Rum99] Rump, Siegfried M.: *INTLAB - INTerval LABORatory*. In: Csendes, Tibor (Herausgeber): *Developments in Reliable Computing*, Seiten 77–104, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [RVZ10] Raïssi, Tarek; Videau, Gaétan und Zolghadri, Ali: *Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems*. In: *Automatica*, Band 46, Nr. 3, Seiten 518–527, 2010.
- [Sch09] Schröder, Dierk: *Elektrische Antriebe. Regelung von Antriebssystemen*. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.
- [Sha02] Shary, Sergey P.: *A New Technique in Systems Analysis Under Interval Uncertainty and Ambiguity*. In: *Reliable Computing*, Band 8, Nr. 5, Seiten 321–418, 2002.
- [Sha14] Shary, Sergey Petrovich: *On full-rank interval matrices*. In: *Numerical Analysis and Applications*, Band 7, Nr. 3, Seiten 241–254, 2014.
- [STR15] Sabater, Assumpta; Thomas, Federico und Ros, Lluís: *ECT - Ellipsoidal Calculus Toolbox*. 2015. URL: <http://www-iri.upc.es/people/ros/ellipsoids.html#paper> (zuletzt besucht am 12.10.2015).
- [Sun58] Sunaga, Teruo: *Theory of interval algebra and its application to numerical analysis*. In: *Research Association of Applied Geometry (RAAG) Memoirs*, Band 2, Seiten 29–46, 1958.
- [TB14] Tabatabaeipour, Seyed Mojtaba und Bak, Thomas: *Robust fault detection of linear systems using a computationally efficient set-membership method*. In: *IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, Seiten 358–363, 2014.
- [Unb09] Unbehauen, Rolf: *Systemtheorie 1. Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich*. 8. Auflage, De Gruyter, Berlin, Boston, 2009.

- [Unb98] Unbehauen, Rolf: *Systemtheorie 2. Mehrdimensionale, adaptive und nichtlineare Systeme*. 7. Auflage, De Gruyter, Berlin, Boston, 1998.
- [VEG16] VEGA Grieshaber KG: *VEGABAR 14*. 2016. URL: <https://www.vega.com/de-DE/Produkte/Produktkatalog/Druck/Prozessdruck/VEGABAR-14> (zuletzt besucht am 18. 11. 2016).
- [War56] Warmus, Mieczyslaw: *Calculus of Approximations*. In: *Bulletin de l'Academie Polonaise de Sciences*, Band 2, Nr. 5, Seiten 253–257, 1956.
- [Wol10] Wolff, Florian: *Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung*. Aus der Reihe *Schriften des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme, Karlsruher Institut für Technologie*. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe, 2010.
- [Woo71] Woodside, C. Murray: *Estimation of the order of linear systems*. In: *Automatica*, Band 7, Nr. 6, Seiten 727–733, 1971.
- [Xio13] Xiong, Jun: *Set-membership state estimation and application on fault detection*. Dissertation, Université Toulouse, 2013.
- [ZBD13] Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Black-Box-Modellierung mit unsicheren Parametern aus Messdaten mit unbekanntem, aber beschränkten Fehlern*. In: Sawodny, Oliver und Adamy, Jürgen (Herausgeber): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.30 "Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik"*, Seiten 157–167. VDI/VDE-GMA, Technische Universität Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Darmstadt, 2013.
- [ZBD14a] Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Interval System Identification for MIMO ARX Models of Minimal Order*. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Seiten 1774–1779, 2014.
- [ZBD14b] Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *MIMO Order and State-Space Model Identification from Interval Data*. In: *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, Seiten 134–139, 2014.
- [ZBD14c] Zaiser, Stefan; Buchholz, Michael und Dietmayer, Klaus: *Black-box modeling with uncertain parameters from measurement data with unknown, but bounded errors*. In: *at - Automatisierungstechnik*, Band 62, Nr. 9, Seiten 607–618, 2014.

