

Die Zahlzeichen bei den Griechen und Römern der Antike

Eine kurze Übersicht über die im klassischen Altertum verwendeten griechischen und römischen Zahlzeichen, das Rechnen mit ihnen und den vorcäsarischen Kalender

von Dr. phil. Rudolf Haller.

Inhalt:

Die in der klassischen Periode Griechenlands älteren griechischen Zahlzeichen,
die späteren griechischen Zahlbuchstaben,
und die römischen Zahlzeichen.

Das Rechnen mit römischen Zahlen:

Addition,
Subtraktion,
Multiplikation,
Division ,
Brüche,
die größtmöglichen Stammbrüche
Stammbruchrechnen,
Quadratwurzel
Würfelerdopplung und Kubikwurzel,
Flächen beliebiger Dreiecke,
Rechtwinklige Dreiecke und pythagoräische Tripel,
Quadratur des Kreises
Trigonometrische Werte

Dazu: [Über den vorcäsarischen Kalender.](#)

Über die Null,

Die wichtigsten Maßeinheiten der klassischen Antike.

Die älteren griechischen Zahlzeichen

Mindestens seit der Zeit des Gesetzgebers Solon (Athen ca. -638 bis -558) wurden Zahlen in einer Weise geschrieben, die sich in den römischen Zahlzeichen wiederfindet. Ihre Verwendung ist bis zum Ende der römischen Republik dokumentiert.

Die hier vorgestellte Darstellung erfolgt nach G. Friedlein „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer“. Veranschaulicht wird dort auch das durchgehende Schreiben und Rechnen nach angeordneten Zehnerpotenzen in der Antike Ägyptens, Griechenlands und Roms.

Schreibung

Das Zahlzeichen für die Einer war ein senkrechter Strich, hier wird dafür | geschrieben.

Für Fünf verwendete man abkürzend Π (πέντε).

Das Zahlzeichen für Zehn war Δ (δέκα), für Hundert Η (έκατόν), für Tausend Χ (χιλιοί), für Zehntausend Μ (μυριοί).

Für Fünfzig, Fünfhundert, Fünftausend und Fünfzigtausend verwendete man Δ, Η, Χ und Μ derart, dass man diese Buchstaben zwischen die vertikalen Striche von Π schrieb.

Die Einer von Eins bis Neun wurden geschrieben:

| || ||| |||| Π Π| Π|| Π||| Π|||

Die Zehner von Zehn bis Neunzig:

Δ ΔΔ ΔΔΔ ΔΔΔΔ Π^Δ Π^ΔΔ Π^ΔΔΔ Π^ΔΔΔΔ Π^ΔΔΔΔΔ

Die Hunderter von Einhundert bis Neunhundert:

Η ΗΗ ΗΗΗ ΗΗΗΗ Π^Η Π^ΗΗ Π^ΗΗΗ Π^ΗΗΗΗ Π^ΗΗΗΗΗ

Die Tausender von Eintausend bis Neuntausend:

Χ ΧΧ ΧΧΧ ΧΧΧΧ Π^Χ Π^ΧΧ Π^ΧΧΧ Π^ΧΧΧΧ Π^ΧΧΧΧΧ

Die Zehntausender von Zehntausend bis Neunzigtausend

Μ ΜΜ ΜΜΜ ΜΜΜΜ Π^Μ Π^ΜΜ Π^ΜΜΜ Π^ΜΜΜΜ Π^ΜΜΜΜΜ

Noch größere Zahlen wurden als Produkte dargestellt.

Mit diesen älteren Zahlzeichen konnte man ebenso rechnen wie später mit den römischen Zahlzeichen.

Die griechischen Zahlbuchstaben

Seit man im Umkreis der Bibliothek von Alexandria (Kalimachus von Alexandria, um -248) mit der Zählung und Kennzeichnung der Zeilen, der Stichometrie, begann, verbreitete sich die Verwendung der Buchstaben zum Zahlenschreiben.

Die hier vorgestellte Darstellung erfolgt nach Kurt Sethe „Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern“ und G. Friedlein „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer“.

Schreibung

Zahlen werden von links geschrieben, beginnend mit den höchsten Zehnerpotenzen.

Die Einer von Eins bis Neun:

α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ
Alpha,	Beta,	Gamma,	Delta,	Epsilon,	Stigma,	Zeta,	Eta,	Theta

Die Zehner von Zehn bis Neunzig:

ι	κ	λ	μ	ν	ξ	\omicron	π	ρ
Iota,	Kappa,	Lambda,	My,	Ny,	Xi,	Omikron,	Pi,	Qoppa

Die Hunderter von Einhundert bis Neunhundert:

ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	δ
Rho,	Sigma,	Tau,	Ypsilon,	Phi,	Chi,	Psi,	Omega,	Sampi

Die Tausender von Eintausend bis Neuntausend mit Beistrich:

$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\epsilon$	$,\varsigma$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\theta$
-----------	----------	-----------	-----------	-------------	--------------	----------	---------	-----------

Für Zahlen ab Zehntausend wird M (Myriade) verwendet, wobei das Tausender-Vielfache über das M geschrieben wird.

δ
M, $\beta\rho\iota\alpha$ für 42111.

Nach den ganzen Zahlen folgte die Benennung. Brüche wurden mit Acutus geschrieben, Zähler und Nenner mit Wortzwischenraum getrennt.

β' für 1/2.
 $\epsilon \iota\theta'$ für 5/19.

Alle diese Zahlen wurden auch in Großbuchstaben geschrieben (jedoch nicht Groß- und Kleinbuchstaben vermischt).

Das Zeichen \varnothing für Null wurde mit den stellenwertigen Sexagesimal-Zahlen der Astronomen verwendet.

Die römischen Zahlzeichen

Zahlen werden auf römische Weise mit Buchstaben geschrieben, die als Zahlzeichen dienen. Mit kleinen Gruppen von Zahlzeichen wird jeweils ein Wert für eine Zehnerpotenz angegeben. Die Zeichengruppe für den Wert einer größeren Zehnerpotenz steht stets links von der für die kleinere. Die Anordnung innerhalb der einzelnen Zeichengruppen ist festgelegt.

Mit der Schreibung nach Zehnerpotenzen behält die römische Schreibweise die wichtigste Grundlage der ägyptischen und griechischen Zahlendarstellung bei.

Die Einer von Eins bis Neun werden geschrieben:

I II III IV V VI VII VIII IX

Die Zehner von Zehn bis Neunzig werden geschrieben:

X XX XXX XL L LX LXX LXXX XC

Die Hunderter von Einhundert bis Neunhundert werden geschrieben:

C CC CCC CD D DC DCC DCCC CM

Tausender werden durch einen Strich über diesen Zahlzeichen geschrieben:

Die Tausender von Eintausend bis Neuntausend:

$\overline{\text{I}}$ $\overline{\text{II}}$ $\overline{\text{III}}$ $\overline{\text{IV}}$ $\overline{\text{V}}$ $\overline{\text{VI}}$ $\overline{\text{VII}}$ $\overline{\text{VIII}}$ $\overline{\text{IX}}$

Entsprechend werden auch die Zehntausender und Hunderttausender mit Strich darüber geschrieben.

Für führende $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{III}}$ steht in populären Zahlenangaben M, MM, MMM.

Ein weiterer Strich über den Zahlzeichen bezeichnet jeweils eine weitere Vervielfachung des Zahlenwertes um den Faktor Tausend.

$\overline{\overline{\text{I}}}$ steht für eine Million.

Zahlen beginnen von links mit den nach Zehnerpotenzen höchstwertigen Zahlzeichengruppen, hier zur Verdeutlichung durch Zwischenräume etwas abgesetzt.

M DCC XC I für 1791,

$\overline{\text{IV}}$ XXX für 4030.

Die zu lernenden Zahlbuchstaben der Reihe nach von rechts nach links: DCLXVI für 666.

Die Schreibung mit Apostrophen statt Querstrichen war gebräuchlich.

Also: XV' C' D für 15'100'500.

Für $\frac{1}{2}$ war auch S (semis) geläufig; es stand stets als letztes Zeichen rechts. So: IS für $1\frac{1}{2}$.

Die älteren Schreibweisen für IV, XL, CD waren IIII, XXXX, CCCC

und die für IX, XC, CM waren VIII, LXXX, DCCC. Die Einführung der späteren kürzeren Schreibweise bedeutete lediglich die Verbreitung einer Schreibkonvention.

Die als „arabisch“ bezeichneten Ziffern wurden ab dem 11. Jahrhundert bekannt; sie entstanden aus handschriftlichen Ligaturen der ersten neun römischen Zahlen.

Addition

Obwohl die römischen Zahlen Dezimalzahlen sind und das Rechnen mit ihnen nach dem Dezimalsystem erfolgt, gibt es für das einfache Addieren und Subtrahieren die Möglichkeit der Zeichenmanipulation, bei der, und auch nur hierbei, die kleinen Zeichengruppen aufgelöst werden. Die einzelnen Zeichen werden dann nach ihren Werten angeordnet.

Für solch einfache Rechnungen empfiehlt sich die Schreibweise nach der älteren Konvention.

Man braucht dann nur zu wissen, dass

IIII zu V,
VV zu X,
XXXXX zu L,
LL zu C,
CCCCC zu D,
DD zu M

zusammenzufassen sind und die abschließende Schreibung dadurch bereinigt wird.

Entsprechend sind die gestrichenen Zahlzeichen, die ja Vielfache von Tausend darstellen, zu handhaben.

Beim Addieren schreibt man die Zahlzeichen der beiden Summanden nach Zehnerpotenzen geordnet zusammen (*additio, hinzutun*).

XII plus V ergibt XVII.

XXVI plus V ergibt XXVII, bereinigt XXXI.

CCXXII plus LXVIII ergibt CCXXXVIII, bereinigt CCXXX.

Mit kleinen Nebenrechnungen geht man jedoch schon auf das Zahlenrechnen über, bei dem die Zeichengruppen der Zahlen nicht mehr aufgelöst werden, und verzichtet dabei auf das Anschreiben von Zwischenschritten.

Bei der Addition mit Zahlenrechnen nach dem herkömmlichen Schema sind die Spalten nach den Zehnerpotenzen anzulegen:

Spalte Tausender	Spalte Hunderter	Spalte Zehner	Spalte Einer	
M	CC		VIII	Summand
		LXX	VI	Summand
M		XL	VII	Summand
	C	XX		Übertrag
MM	CCC	XXX	I	Ergebnis

Subtraktion

Um das Subtrahieren mit römischen Zahlen nach der älteren Schreibkonvention zu lernen, braucht man nur zu wissen, dass, wenn nötig,

V zu IIIII
X zu VV
L zu XXXXX,
C zu LL
D zu CCCCC,
M zu DD,

auseinanderzuziehen sind, so dass aus dieser expandierten Darstellung das Wegnehmen der Zahlzeichen erfolgen kann.

Man streicht die Zahlzeichen des Subtrahenden im Minuenden aus (subtrahere, *entfernen*). Dazu muss, wenn man es ausführlich schreiben will, gegebenenfalls der Minuend expandiert werden.

XXXVIII minus XVI ergibt ~~XXVIIII~~, das ist XXII.

LXXVI minus XXXIII ist
XXXXX XX IIIII I minus XXXIII, ergibt ~~XXXXX XX IIIII I~~,
das ist XXXXIII.

Mit kleinen Nebenrechnungen, wenn bereits einige Schritte gelernt wurden, geht man wieder auf das Zahlenrechnen über, wobei selbstverständlich die Zeichengruppen nicht mehr auseinandergezogen werden.

MV minus XXI ergibt DCCCC LXXX IIII.

Auch die Subtraktion kann nach einem Schema mit Anordnung nach den Zehnerpotenzen erfolgen, wobei entsprechende Spalten anzulegen sind.

Für die übrigen Teile der auf diesen Seiten gegebenen Darstellung wird aber die neuere Schreibkonvention der römischen Zahlen verwendet.

Multiplikation

Beim Multiplizieren und Dividieren römischer Zahlen spielen Verdoppeln und Halbieren eine wichtige Rolle. Die mathematische Grundlage dieser Algorithmen ist die Binärexpansion der Zahlen.

Halbieren und Verdoppeln

Man halbiert eine ganze Zahl, indem man von links nach rechts durch die Gruppen der Zehnerpotenzen rechnet. Eine ungerade Zahl lässt dabei als Rest zehn Einheiten der nächst niedrigeren Zehnerpotenz, die dort dazu gezählt werden.

Man verdoppelt eine Zahl, indem man von rechts nach links rechnet. Ergibt sich in einer Gruppe ein Ergebnis größer Neun, addiert man eine Einheit zur nächsthöheren Zehnerpotenz.

Zum Multiplizieren schreibt man jeweils eine Kolumne unter die Faktoren; die erste mit fortlaufender Halbierung bis Eins, wobei Reste entfallen, die andere mit fortlaufender Verdopplung. Die Zahlen der rechten Kolumne, denen gegenüber in der linken Kolumne eine **ungerade** Zahl steht, werden addiert und ergeben das Ergebnis (Zahlen, denen eine gerade Zahl gegenübersteht, werden ignoriert).

Beispiele:

VIII	mal	VII
IV		XIV
II		XXVIII
I		LVI

die einzige ungerade Zahl in der linken Kolumne steht in der letzten Zeile, das Ergebnis LVI steht rechts davon.

XII	mal	VIII
VI		XVI
III		XXXII
I		LXIV

man addiert:

XXXII plus LXIV ergibt LXXXXVI, das ist bereinigt XCVI.

Man kann auch nach dem herkömmlichen Schema rechnen, bei dem die Spalten nach den Zehnerpotenzen angeordnet werden.

Division

Auch beim Dividieren legt man zwei Kolumnen an.

In der ersten Kolumne beginnt man mit Eins und verdoppelt in jeder Zeile.

In der zweiten Kolumne beginnt man mit dem Divisor und verdoppelt in jeder Zeile bis der Dividend gerade noch nicht überschritten wird - „man multipliziert um zu dividieren“.

Man rechnet dann in der rechten Kolumne von unten nach oben.

In der untersten Zeile wird vom Dividenden die Zahl in der rechten Kolumne abgezogen. Die Zahl der linken Kolumne zählt zum Ergebnis, mit dem Ergebnis der Subtraktion wird in der Zeile darüber weiter gerechnet und es wird die Zahl in der rechten Kolumne vom bisherigen Ergebnis subtrahiert.

Ist der Wert in der rechten Kolumne der nächstoberen Zeile größer als das bisherige Ergebnis, wird diese Zeile übersprungen, wobei dann der übersprungene Wert der linken Kolumne nicht zum Ergebnis zählt..

Zum Schluss werden die Ergebniszahlen aus der linken Kolumne addiert. In der obersten Zeile ergibt sich der Divisionsrest.

CXLV : XIII =

I XIII XV minus XIII ergibt Divisionsrest II

II XXVI XLI minus XXVI ergibt XV

IV LII wird übersprungen, da LII größer als XLI

VIII CIV CXLV minus CIV ergibt XLI

Ergebnis: I plus II plus VIII = XI, Divisionsrest II.

MCCXXXIV : XXIII =

I XXIII XXXVIII minus XXIII ergibt Divisionsrest XV

II XLVI

IV XCII CXXX minus XCII ergibt XXXVIII

VIII CLXXXIV

XVI CCCLXVIII CDXCVIII minus CCCLXVIII ergibt CXXX

XXXII DCCXXXVI MCCXXXIV minus DCCXXXVI ergibt CDXCVIII

Ergebnis: I plus IV plus XVI plus XXXII = LIII, Divisionsrest XV.

Selbstverständlich kann auch die Division nach einem herkömmlichen Schema mit Anordnung nach Zehnerpotenzen erfolgen.

Brüche

Ein Bruch wie $12/13$, der wie eine nicht ausgeführte Division erscheint, wird in der Moderne eventuell in einen Dezimalbruch umgewandelt.

Die Mathematiker der Antike haben gebrochen rationale Zahlen in einer Stammbruchreihe dargestellt. Die Anschauung dazu lieferte der Gebrauch der Gewichte auf der Balkenwaage.

Da ein Stammbruch stets den Zähler Eins hat, wird er beim Schreiben weggelassen.

Die Hintereinanderschreibung der Stammbrüche bedeutet ihre Addition.

$VI /II /XII$ steht für Sechs und ein Halb und ein Zwölftel (Sechs und sieben Zwölftel).

Ein Näherungswert für die Kreiszahl ist: $III /VIII /LXI /\overline{VXX}$.

Um die zugehörigen Stammbrüche zu finden, wird der Zähler des Bruches additiv zerlegt:

$$\begin{array}{r} VII : XII \\ - VI : XII \quad (/II) \\ \hline I : XII \quad (/XII) \end{array}$$

$$VII : XII = /II /XII$$

Wie Heron in seinen Beispielen gezeigt hat, subtrahiert man die Stammbrüche der Reihe nach von den erweiterten Brüchen:

$$\begin{array}{r} XII : XIII = XXIV : XXVI \quad (\text{mit } 2 \text{ erweitert}) \\ - XIII : XXVI \quad (/II \text{ von } XXVI) \\ \hline XI : XXVI = XXXIII : LXXVIII \quad (\text{mit } 3 \text{ erweitert}) \\ - XXVI : LXXVIII \quad (/III) \\ \hline VII : LXXVIII = XIV : CLVI \quad (\text{mit } 2 \text{ erweitert}) \\ - XIII : CLVI \quad (/XII) \\ \hline I : CLVI \quad (/CLVI) \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } XII : XIII = /II /III /XII /CLVI.$$

Man bestimmt die größtmöglichen Stammbrüche, indem man jeweils als Erweiterung des Bruches den ganzzahlig aufgerundeten Kehrwert des gegebenen Bruches nimmt.

Diese Erweiterung wird dann auch Nenner des nächsten Teilergebnisses.

$$\begin{array}{r} VII : XVII = XXI : LI \quad (XVII : VII \geq II, \text{ Erweiterung des Bruches: } III) \\ - XVII : LI \quad (/III) \\ \hline IV : LI = LII : DCLXIII \quad (LI : IV \geq XII, \text{ Erweiterung } XIII) \\ - LI : DCLXIII \quad (/XIII) \\ \hline I : DCLXIII \quad (/DCLXIII) \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } VII : XVII = /III /XIII /DCLXIII.$$

Jede positive rationale Zahl kleiner Eins kann mit einer abbrechenden Stammbruchreihe dargestellt werden.

Die größtmöglichen Stammbrüche

Zur eindeutigen Vergleichbarkeit von Stammbruchreihen werden sie mit den größtmöglichen Stammbrüchen gebildet.

Es ist zum, Beispiel, $/IV /XVI$ mit den größtmöglichen Stammbrüchen gebildet, denn $V : XVI$ ist mit IV , der kleinsten ganzen Zahl größer als $XVI : V$, zu erweitern.

Es ist also $V : XVI = XX : LXIV = /IV /XVI$.

Es ist, zum Beispiel $/IV /VIII$ nicht mit den größtmöglichen Stammbrüchen gebildet, denn $III : VIII$ ($II < VIII : III < III$) ist mit III zu erweitern, und damit $/IV /VIII = /III /XXIV$.

Offensichtlich ist $/III$ der bessere Näherungswert für den ganzen Ausdruck, falls die Stammbruchreihe abgebrochen wird.

Addition von Stammbruchreihen

Stammbruchreihen werden gliedweise von rechts mit den kleinsten Werten beginnend addiert. Die Teilsummen werden vor dem Weiterrechnen in größtmögliche Stammbrüche umgeformt.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} /II /IV + /III /VIII \\ \hline /II /IV \\ \quad /VIII \\ \hline /II /III /XXIV \\ \quad /III \\ \hline /II /II /VI /XXIV = I /VI /XXIV \end{array}$$

Subtraktion von Stammbruchreihen

Stammbruchreihen werden gliedweise von links beginnend mit dem kleinsten Glied des Minuenden, das größer ist als das größte des Subtrahenden, subtrahiert.

Auch hier werden die Zwischenergebnisse, wenn nötig, vor dem Weiterrechnen in größtmögliche Stammbrüche umgeformt.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} /II /IV - /III /VIII \\ \hline /II /IV \\ \quad /III \\ \hline /VI /IV = \\ /IV /VI \text{ (umgeordnet)} \\ \quad /VIII \\ \hline /IV /XXIV \end{array}$$

Stambruchrechnen

Multiplikation von Stambruchreihen

Man multipliziert zwei Stambrüche indem man ihre Nenner multipliziert:

$$1/a \cdot 1/b = 1/(a \cdot b)$$

Stambruchreihen werden gliedweise nach dem Distributionsgesetz multipliziert, wobei die Zwischenergebnisse, wenn nötig, zu größtmöglichen Stambrüchen umgeformt werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{/II /IV} \cdot \text{/III /VIII}}{\text{/II /IV} \cdot \text{/III} \quad \text{/II /IV} \cdot \text{/VIII}} \\ &= \frac{\text{/VI /XII}}{\text{/IV}} = \frac{\text{/XVI /XXXII}}{\text{/XI /CCCLII}} \\ &= \frac{\text{/IV /XI /CCCLII}}{\text{/III /XCVI}} \end{aligned}$$

Division von Stambruchreihen

Man dividiert einen Stambruch durch einen anderen, indem man den Nenner des Divisors durch den Nenner des Dividenden teilt und die Stambruchreihe neu ausrechnet:

$$1/a : 1/b = b : a.$$

Zur Division mit einer Stambruchreihe bringt man den Divisor auf den Hauptnenner und Multipliziert mit dem Kehrwert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \text{/II /IV} : \text{/III /VIII} \\ &= \text{/II /IV} : (\text{XI} : \text{XXIV}) \\ &= \text{/II /IV} * \text{XXIV} : \text{XI} \\ &= (\text{XII} + \text{VI}) : \text{XI} = \text{XVIII} : \text{XI} = \text{I /II /VIII /LXXXVIII} \end{aligned}$$

Quadratwurzel nach Heron

Die Aufgabe der Flächenverdopplung eines Quadrats wurde in der Antike vollständig gelöst. Die geometrische Lösung besteht darin, das Quadrat über der Diagonalen des Ausgangsquadrats zu errichten.

Hat das Ausgangsquadrat die Seitenlänge 1, dann hat das verdoppelte Quadrat die Seitenlänge derjenigen Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

Die Quadratwurzel aus 2 kann nicht mit Brüchen ganzer Zahlen dargestellt werden; dies wurde schon in der Antike mit indirektem Beweis gezeigt. Trotz dieser Unmöglichkeit liefern Brüche Näherungswerte zu einer berechenbaren Genauigkeit.

Heron (ca. 20 - 62) hat in Alexandria ein schnelles Verfahren zur Näherungslösung einer Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl bekannt gemacht.

Es wird dazu die Division mit einer gemischten Zahl und die Berechnung des arithmetischen Mittels zweier Zahlen benötigt.

arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel $(a + b)/2$ zweier gemischter Zahlen mit Stammbrüchen wird berechnet, indem man die ganzen Zahlen addiert und die Summe halbiert. Kommt der gleiche Stammbruch in beiden Zahlen vor, wird er in das Ergebnis übernommen, ist er nur einmal vorhanden, wird der Nenner verdoppelt.

Das arithmetische Mittel aus II und II/II ist II/IV ,
das aus $\text{X}/\text{II}/\text{IV}$ und II/II ist $\text{VI}/\text{II}/\text{VIII}$.

Zur Berechnung der Quadratwurzel aus der positiven Zahl k wird das gesuchte Ergebnis durch euklidische Intervallschachtelung der Intervalle $[a_n, b_n]$ eingegrenzt.

Man beginnt mit den Näherungswerten a_0 und b_0 , $a_0^2 < k$, $b_0^2 > k$, und dem Intervall $[a_0, b_0]$.
Das Verfahren ist selbstkorrigierend.

Es ist dann für $n > 1$ zu berechnen:

$a_{n+1} = k/b_n$ damit ist $1 : a_{n+1} = b_n : k$ (vier Zahlen in Proportion),

$b_{n+1} = (b_n + a_{n+1})/2$ (arithmetisches Mittel, $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/2$).

Quadratwurzel aus II:

	$a_{n+1} = \text{II} : b_n$	$b_{n+1} = (b_n + a_{n+1}) : \text{II}$
	$a_0 = \text{I}$	$b_0 = \text{I} / \text{II}$ (erste Näherungswerte von unten und von oben)
n	a_n	b_n

1 I / III I / III / XII

2 I / III / XVII / LI I / III / XIII / CDVIII / DCLXIII

Bricht man also nach 2 Iterationen ab, ist hier der letzte Wert bereits auf 10^{-5} genau.

Die beiden letzten Glieder der Stammbruchreihe sind jedoch noch nicht sicher. Das Ergebnis würde durch Weiterrechnen auf $\text{I} / \text{III} / \text{XIII} / \text{CCLIII}$ verbessert.

Bei der Bestimmung von Näherungswerten für irrationale Zahlen nimmt in der Stammbruchreihe der jeweils nächstfolgende Stammbruch die Größenordnung des Quadrats des vorher letzten Glieds der Stammbruchreihe an, was die Abschätzung des Abbruchfehlers erlaubt.

Würfelverdopplung

Die Aufgabe, das Volumen eines Würfels zu verdoppeln und die dafür erforderliche neue Kantenlänge für den verdoppelten Würfel zu finden, hat zu vielen Anregungen geführt.

Hippokrates aus Chios (ca. -470 bis -410) erkannte, dass die Lösung gefunden wird, indem man das richtige mittlere Verhältnis für das ursprüngliche Volumen a und das doppelte Volumen $2a$ sucht: $a : x = x : y = y : 2a$.

Aus $a : x = x : y$ erhält man $a \cdot y = x \cdot x$.

Ist $a = 1$ der Ausgangswert, dann ist $y = x \cdot x$ und $1 : x = x : (x \cdot x) = (x \cdot x) : 2$

Damit ist $x \cdot x \cdot x = 2$

und x ist demzufolge diejenige Zahl, die dreimal als Faktor genommen 2 ergibt; diese Zahl ist durch Brüche aus ganzen Zahlen nicht darstellbar.

Die Berechnung der Näherungswerte der Kubikwurzel aus k erfolgt ähnlich wie die der Quadratwurzel nach Heron mit einer entsprechenden euklidischen Intervallschachtelung.

Man beginnt für $k > 1$ mit den Näherungswerten a_0 und b_0 , so dass $a_0^3 < k$ und $b_0^3 > k$, und dem Intervall $[a_0, b_0]$. Das Verfahren ist selbstkorrigierend.

Es sind dann zu berechnen:

$a_{n+1} = k/b_n^2$, wobei $1 : a_{n+1} = b_n^2 : k$ (Ergänzung der Proportion) und

$b_{n+1} = (2 b_n + a_{n+1})/3$ (arithmetisches Drittel, $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/3$).

Kubikwurzel aus II:

	$a_{n+1} = \text{II} : b_n^2$	$b_{n+1} = (\text{II} \cdot b_n + a_{n+1}) : \text{III}$
	$a_0 = \text{I}$	$b_0 = \text{I} / \text{III}$ (erste Näherungswerte)
n	a_n	b_n
<hr/>		
1	I / VIII	I / IV / LXXII
2	I / IV / CDXCIV	I / IV / CI

Obwohl in der 2ten Zeile gerundet wurde, ist der letzte Wert auf 10^{-5} genau.

Ein Würfel mit der Kantenlänge .I / IV / CI. hat den Rauminhalt .II. mit der angegebenen Genauigkeit.

Beliebige Wurzeln

Die m -te Wurzel aus $k > 1$ wird durch euklidische Schachtelung der Intervalle $[a_n, b_n]$, mit $a_0 = 1$ und b_0 , so dass $b_0^m > k$ und $a_1 > 1$, eingegrenzt:

$a_{n+1} = k/b_n^{m-1}$, wobei $1 : a_{n+1} = b_n^{m-1} : k$ (Ergänzung der Proportion),

$b_{n+1} = ((m-1) \cdot b_n + a_{n+1})/m$ (arithmetisches m -Teil: $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/m$).

Eine Schreibkonvention für Dezimalzahlen

Die dezimalen Zahlensysteme der Ägypter, Griechen und Römer haben, unter vielem anderen, die Entwicklung der Mathematik ermöglicht.

Die Schreibweise mit den zehn durch je ein Zahlzeichen notierten Zahlen wurde seit dem 12ten Jahrhundert aus praktischen Gründen mitsamt seiner dazu erforderlichen tabellarischen Darstellung zunehmend angewandt. Dazu wurden die ersten neun römischen Zahlzeichengruppen zu je einem Zeichen handschriftlich kursiv verschmolzen und die Null, die aufgrund der tabellarischen Schreibweise intensiv zu verwenden war, von der griechischen tabellarischen Notation übernommen.

Das einheitliche Rechnen mit Dezimalbrüchen, das später dazukam, hat dem dezimalen Stellenwertsystem zum endgültigen Durchbruch verholfen, so dass es gegenwärtig zur allgemeinen Schreibkonvention bei manueller Verwendung geworden ist.

Die Flächen beliebiger Dreiecke

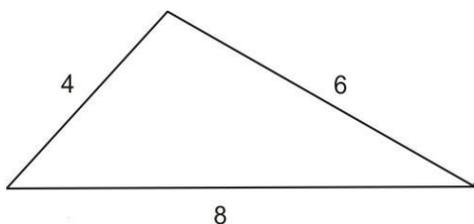
Von Heron ist ein Berechnungsverfahren für den Flächeninhalt beliebiger Dreiecke, von denen die Seitenlängen bekannt sind, überliefert.

Für die Seitenlängen a, b, c ist der Flächeninhalt A

$$A = 1/4 \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung (Stoicheia I.20) ist jeder der Faktoren unter dem Wurzelzeichen größer Null.

Beispiel:



Für ein Dreieck mit den Seiten 4, 6, 8 Längeneinheiten ist somit

$a+b+c$	$a+b-c$	$a+c-b$	$b+c-a$	Produkt
18	2	6	10	2160
			Wurzel daraus	$12 \sqrt{15}$
			$1/4$ davon	$3 \sqrt{15}$

Das Ergebnis: $3 \sqrt{15}$ Flächeneinheiten.

Weiteres Beispiel:

Für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit den Seitenlängen 1 ergibt sich mit einfacher Rechnung: $1/4 \sqrt{3}$

Rechtwinklige Dreiecke und pythagoräische Tripel

Heron von Alexandria hat in seinem Werk „Geometrica“ (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, Vol. IV, Stuttgart 1976, S. 221) eine Methode Platons angegeben, um rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu konstruieren:

Gehe von einer geraden Zahl (größer 2) aus.	$2n + 2$
Es sei für die Kathete die Zahl 8 gegeben.	
Nimm die Hälfte: 4.	$n + 1$
Bilde das Quadrat: $4 * 4 = 16$.	$(n + 1)^2$
Nimm 1 weg: $16 - 1 = 15$. So viel die Grundlinie.	$(n + 1)^2 - 1$
Grundlinie +2 ergibt 17, dies wird die Hypotenuse sein.	$(n + 1)^2 + 1$

In diesem Zahlenbeispiel wird das Tripel [8, 15, 17] gefunden.

Der letzten Zeile der Verfahrensvorschrift ist zu entnehmen, dass damit Tripel gefunden werden, bei denen Kathete und Hypotenuse die Differenz 2 aufweisen. Offensichtlich sind mit der überlieferten Anleitung unbegrenzt viele sogenannte pythagoräische Tripel auffindbar.

Allgemein erhält man bei $a = 2n + 2$
für die andere Kathete $b = (n + 1)^2 - 1$
und für die Hypotenuse $c = (n + 1)^2 + 1 = b + 2$.

Es gibt allerdings, was Heron nicht überliefert hat, zu jeder ganzzahligen Differenz zwischen einer der Katheten und der Hypotenuse unbegrenzt viele ganzzahlige Tripel, wenn auch nicht stets in kleinsten Zahlen, also solche, die nicht Vielfache eines anderen sind.

Ist die Differenz $d = c - b$ von Kathete b und Hypotenuse c , dann ist für alle natürlichen Zahlen n :

$d = 1:$	$a = 2n + 1,$	$c = (a^2 + 1)/2,$
$d = 2:$	$a = 2n + 2,$	$c = (a^2 + 2^2)/4 = (n + 1)^2 + 1,$
$d = 3:$	$a = 6n + 3,$	$c = (a^2 + 3^2)/6,$
$d = 4:$	$a = 4n + 4,$	$c = (a^2 + 4^2)/8,$
$d = 5:$	$a = 10n + 5,$	$c = (a^2 + 5^2)/10,$
$d = 6:$	$a = 6n + 6,$	$c = (a^2 + 6^2)/12,$
$d = 7:$	$a = 14n + 7,$	$c = (a^2 + 7^2)/14,$
$d = 8:$	$a = 4n + 8,$	$c = (a^2 + 8^2)/16,$
$d = 9:$	$a = 6n + 9,$	$c = (a^2 + 9^2)/18,$
$d = 10:$	$a = 10n + 10,$	$c = (a^2 + 10^2)/20,$
$d = 11:$	$a = 22n + 11,$	$c = (a^2 + 11^2)/22,$
$d = 12:$	$a = 12n + 12,$	$c = (a^2 + 12^2)/24,$

und so weiter.

Stets ist dabei $a = t \cdot n + d$.

Ist $2d$ eine Quadratzahl oder Vielfache einer Quadratzahl q^2 , dann ist $t = 2d/q$, sonst $2d$.

Es ist dann $c = (a^2 + d^2)/2d$ die Größe der Hypotenuse und $b = c - d$ die der anderen Kathete im rechtwinkligen Dreieck.

Die Hypotenuse rechtwinkliger Dreiecke in Tripel kleinster Zahlen ist $c \equiv 1 \pmod{4}$.

Auf diese Weise können alle Dreieckstripel in Abhängigkeit von d und n berechnet werden.

In der beigefügten Tabelle "Die Pythagoräischen Tripel" werden ganzzahlige Dreieckszahlen in der Anordnung $[a, c, b]$ aufgelistet mit Hervorhebung der Tripel in kleinsten Zahlen.

Die Quadratur des Kreises

Die Aufgabe der Quadratur des Kreises besteht darin, zu einem gegebenen Kreis mit bekanntem Radius r die Seitenlänge a eines Quadrats anzugeben, das den gleichen Flächeninhalt hat.

Allgemein bekannt geworden ist diese Aufgabe damit, dass sie geometrisch nur mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

Mit Euklid (ca. -323 bis -283) gilt für zwei Kreise mit Radien r_1 und r_2 und Flächen A_1 und A_2

$$r_1^2 : r_2^2 = A_1 : A_2$$

und für ihre Durchmesser d_1 und d_2 und ihre Umfänge U_1 und U_2 : $d_1 : d_2 = U_1 : U_2$

mit dem Proportionalitätsfaktor, der seit Leonhard Euler (1707 bis 1783) mit π bezeichnet wird.

Auch π kann nicht mit Brüchen ganzer Zahlen dargestellt werden. Die Berechnung von Näherungswerten mit Brüchen, Stammbrüchen oder Dezimalbrüchen, führt deshalb zu beliebig lange fortsetzbaren Reihen, wenn die zu erzielende Genauigkeit nicht angegeben wird.

Brauchbare Näherungswerte für π wurden mit der Berechnung des Umfangs von regelmäßigen Vielecken erzielt, die einem Kreis mit Durchmesser 1 eingeschrieben sind.

Hat ein regelmäßiges Sechseck einen Umkreis mit Durchmesser 1, so bestehen seine 6 Sektoren, wegen ihrer Innenwinkel von 60° , aus gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge $1/2$.

Der Umfang dieses Sechsecks ist deshalb $6 \cdot 1/2 = 3$, was einen ersten Näherungswert 3 liefert.

Zieht man in den Sektoren des $3 \cdot 2^n$ -Ecks die Mittelsenkrechten zur Kante um ein regelmäßiges $3 \cdot 2^{n+1}$ -Eck zu konstruieren, ist die Höhe des Sektoren-Dreiecks auf der äußeren Seite, der Kante a_n , für natürliche Zahlen n , mit dem Satz vom rechtwinkligen Dreieck (Stoicheia I.47):

$$h_n = \sqrt{1/4 - 1/4 a_n^2}$$

und die Kantenlänge a_{2n} des regelmäßigen $3 \cdot 2^{n+1}$ -Ecks :

$$a_{2n} = \sqrt{1/2 - h_n} = \sqrt{1/2 - 1/2 \sqrt{1 - a_n^2}}$$

Damit ist der Umfang U_m regelmäßiger $3 \cdot 2^n$ -Ecke, für $m = 3 \cdot 2^n$, mit Umkreisdurchmesser 1:

$$U_{12} = 3 \cdot 2^2 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$U_{24} = 3 \cdot 2^3 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$U_{48} = 3 \cdot 2^4 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

...

Von Archimedes (ca. -285 bis -212) ist überliefert, dass er zur Bestimmung eines verbesserten Näherungswertes für die Kreiszahl ein 96-Eck berechnet habe.

Zieht man mit Heron die Quadratwurzel aus dem Näherungswert

$$\pi = \text{III} / \text{VIII} / \text{LXI}$$

erhält man den Näherungswert

$$\sqrt{\pi} = \text{I} / \text{II} / \text{IV} / \text{XLV}$$

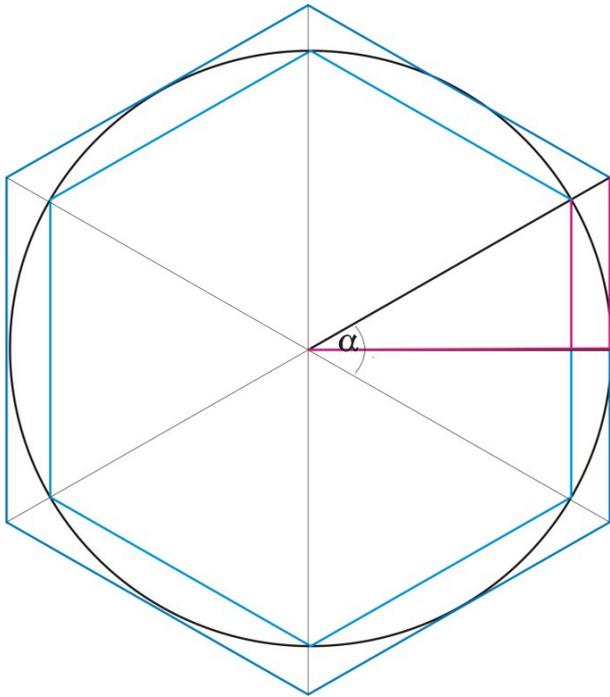
als Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1.

Trigonometrische Werte

Mit wachsender Anzahl n nähert sich der Umfang eines regelmäßigen n -Ecks mit Umkreisdurchmesser 1 der Kreiszahl π „von unten“.

Mit wachsender Anzahl n nähert sich der Umfang eines regelmäßigen n -Ecks mit Inkreis-Durchmesser 1 der Zahl π „von oben“.

π kann auf diese Weise in immer enger werdende Grenzen eingeschlossen werden. Bereits in der Antike verstand man, dass sich die Annäherungen „von unten“ und „von oben“ der gleichen Zahl nähern.



Die Kantenlänge eines regelmäßigen n -Ecks mit Umkreisdurchmesser 1 und Sektoren-Innenwinkel α ist, mit der Definition des Sinus: $\sin(\alpha/2)$.

Klaudios Ptolemaios hat um 150 in Alexandria die Sinus-Werte in $1/4^\circ$ -Schritten tabelliert und in seiner mathematischen Sammlung, auch genannt „Almagest“, veröffentlicht. (Die Tabelle läuft von $1/2^\circ$ bis 180° und listet die doppelten Gradzahlen auf). Keiner dieser Werte weicht um 10^{-5} ab.

Im regelmäßigen n -Eck mit Umkreisdurchmesser 1 ist die Höhe eines Sektoren-Dreiecks über der Kante, mit der Definition des Cosinus: $1/2 \cos(\alpha/2)$.

Die Kantenlänge k_m des regelmäßigen $3 \cdot 2^n$ -Ecks mit Inkreis-Durchmesser 1 ist, mit der Definition des Tangens: $\tan(\alpha/2) = \sin(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$; sie wird jeweils nach Euklid mit Strahlensatz aus Kante und Höhe des Sektoren-Dreiecks des dem Kreis eingeschriebenen n -Ecks berechnet.

Es ist für die $3 \cdot 2^n$ -Ecke:

$$k_6 = \frac{1}{2} = \tan 30^\circ, \quad k_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} = \tan 15^\circ, \quad k_{24} = \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \tan 7,5^\circ,$$

$$k_{48} = \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \tan 3,75^\circ, \quad \text{und so weiter.}$$

Ähnliches gilt für $4 \cdot 2^n$ - und $5 \cdot 2^n$ -Ecke.

Die Fläche A_n eines regelmäßigen n -Ecks mit Umkreis-Radius 1 ist damit

$$A_n = \frac{n}{2} \cos \frac{360^\circ}{2n} \cdot 2 \sin \frac{360^\circ}{2n} = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \quad \text{und nähert sich mit wachsendem } n \text{ der Kreiszahl } \pi.$$

Die Beziehung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ war schon früh bekannt und hat mit der Berechnung des Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel die Erstellung trigonometrischer Tafeln ermöglicht.

Das große Interesse der Mathematiker der Antike an regelmäßigen Vielecken galt vor allem den trigonometrischen Werten.

Über die Null

Von den trigonometrischen Tabellen der „Mathematischen Sammlung“, bekannt auch als „Almagest“, des Klaudios Ptolemaios (ca. 100 bis 160) gingen wesentliche Anregungen aus. Sie enthalten tabellarisch Werte für Grad und Minuten (60^{-1} Grad), die an den Stellen, an denen einer dieser Werte Null ist, das Zeichen $\bar{\omega}$ enthalten, wie hier im dritten Buch über die Anomalien der Sonne:

Κανόνιον ἢ ἡλιακῆς ἀνωμαλίας.

ᾱ β̄ γ̄

μοιρ. δμαλῶν λινή- σεων ἀριθμοὶ κοινοὶ		προδιαφαιρίσεις	
ς	τιδ	̄	ιδ
ιβ	τμθ	̄	κθ
ιθ	τιβ	̄	μβ
κδ	τλς	̄	νς
λ	τλ	α	θ
λς	τκδ	α	κα
μβ	τιθ	α	λβ

Aber auch der Text enthält vielfach dieses Zeichen in korrekter Stellenwert-Schreibweise, so zum Beispiel in dem abgebildeten Textteil am Ende des 3. Buches in der vorletzten Zeile die Erwähnung von $0^{\circ} 45'$ (dabei dient der obere Querstrich zur Unterscheidung von Buchstaben und Zahlen).

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ.

81

Ἡ τῶν δμαλῶν νηθημίρων ὑποσέσις, τὰ καιρικὰ καὶ ἀπλῶς διαφερόμενα λαμβάνεται, τῆς προκαμίνης τῶν ἑσπέρων χρόνων προδιαφαιρίσεις ἀνώπαλιμ χρομίδης. Ἐπῶχε ἰδίτοι κατὰ τὴν ἡμιτόραν ἐποχὴν ὁ ἄλιος, τουτίσι β̄ ᾱ ἔτα Ναβονασσῶρου κατ' Αἰγυπτίους δὲ β̄ ᾱ ἢ μισομυριάς, δμαλῶς μὲν λινούμινθ ὡς μικρῶν πρόδρον ἀποσείφατος, ἰχθύων ὀ μι, ἀνωμαλίας δὲ γ̄ μοιρῶν, ἡσὶ ἢ ἕγχεσσι ἕξ α. τῶν ἰχθύων.

Jedes stellenwertige Zahlensystem, so auch das dezimale und das sexagesimale, ist ein tabellarisches Zahlensystem, was die Anordnung schon der schriftlichen Addition bestimmt, und beruht auf der tabellarischen Idee.

Ptolemaios konnte auf Vorarbeiten seit Apollonios von Perge (um -250) und auf Erkenntnisse der Astronomen aus Babylon und Ägypten zurückgreifen.

Ein allgemein benütztes stellenwertiges Zahlensystem stand in der hellenistischen Welt noch nicht zur Verfügung, jedoch wurde in der Astronomie das Zeichen $\bar{\omega}$ für Null als Ziffer verwendet.

Die Pythagoräischen Tripel mit kleinstem n und kleinem d mit Hervorhebung der Tripel in kleinsten Zahlen.

Erläuterung: Rechtwinklige Dreiecke.

n	d=1 2n+1			d=2 2n+2			d=8 4n+8			d=9 6n+9			d=18 6n+18			d=25 10n+25		
1	3	5	4	4	5	3	12	13	5	15	17	8	24	25	7	35	37	12
2	5	13	12	6	10	8	16	20	12	21	29	20	30	34	16	45	53	28
3	7	25	24	8	17	15	20	29	21	27	45	36	36	45	27	55	73	48
4	9	41	40	10	26	24	24	40	32	33	65	56	42	58	40	65	97	72
5	11	61	60	12	37	35	28	53	45	39	89	80	48	73	55	75	125	100
6	13	85	84	14	50	48	32	68	60	45	117	108	54	90	72	85	157	132
7	15	113	112	16	65	63	36	85	77	51	149	140	60	109	91	95	193	168
8	17	145	144	18	82	80	40	104	96	57	185	176	66	130	112	105	233	208
9	19	181	180	20	101	99	44	125	117	63	225	216	72	153	135	115	277	252
10	21	221	220	22	122	120	48	148	140	69	269	260	78	178	160	125	325	300
11	23	265	264	24	145	143	52	173	165	75	317	308	84	205	187	135	377	352
12	25	313	312	26	170	168	56	200	192	81	369	360	90	234	216	145	433	408
13	27	365	364	28	197	195	60	229	221	87	425	416	96	265	247	155	493	468
14	29	421	420	30	226	224	64	260	252	93	485	476	102	298	280	165	557	532
15	31	481	480	32	257	255	68	293	285	99	549	540	108	333	315	175	625	600
16	33	545	544	34	290	288	72	328	320	105	617	608	114	370	352	185	697	672
17	35	613	612	36	325	323	76	365	357	111	689	680	120	409	391	195	773	748
18	37	685	684	38	362	360	80	404	396	117	765	756	126	450	432	205	853	828
19	39	761	760	40	401	399	84	445	437	123	845	836	132	493	475	215	937	912
20	41	841	840	42	442	440	88	488	480	129	929	920	138	538	520	225	1025	1000
21	43	925	924	44	485	483	92	533	525	135	1017	1008	144	585	567	235	1117	1092
22	45	1013	1012	46	530	528	96	580	572	141	1109	1100	150	634	616	245	1213	1188
23	47	1105	1104	48	577	575	100	629	621	147	1205	1196	156	685	667	255	1313	1288
24	49	1201	1200	50	626	624	104	680	672	153	1305	1296	162	738	720	265	1417	1392
25	51	1301	1300	52	677	675	108	733	725	159	1409	1400	168	793	775	275	1525	1500
26	53	1405	1404	54	730	728	112	788	780	165	1517	1508	174	850	832	285	1637	1612

n	d=32 8n+32			d=49 14n+49			d=50 10n+50			d=72 12n+72			d=81 18n+81			d=98 14n+98		
1	40	41	9	63	65	16	60	61	11	84	85	13	99	101	20	112	113	15
2	48	52	20	77	85	36	70	74	24	96	100	28	117	125	44	126	130	32
3	56	65	33	91	109	60	80	89	39	108	117	45	135	153	72	140	149	51
4	64	80	48	105	137	88	90	106	56	120	136	64	153	185	104	154	170	72
5	72	97	65	119	169	120	100	125	75	132	157	85	171	221	140	168	193	95
6	80	116	84	133	205	156	110	146	96	144	180	108	189	261	180	182	218	120
7	88	137	105	147	245	196	120	169	119	156	205	133	207	305	224	196	245	147
8	96	160	128	161	289	240	130	194	144	168	232	160	225	353	272	210	274	176
9	104	185	153	175	337	288	140	221	171	180	261	189	243	405	324	224	305	207
10	112	212	180	189	389	340	150	250	200	192	292	220	261	461	380	238	338	240
11	120	241	209	203	445	396	160	281	231	204	325	253	279	521	440	252	373	275
12	128	272	240	217	505	456	170	314	264	216	360	288	297	585	504	266	410	312
13	136	305	273	231	569	520	180	349	299	228	397	325	315	653	572	280	449	351
14	144	340	308	245	637	588	190	386	336	240	436	364	333	725	644	294	490	392
15	152	377	345	259	709	660	200	425	375	252	477	405	351	801	720	308	533	435
16	160	416	384	273	785	736	210	466	416	264	520	448	369	881	800	322	578	480
17	168	457	425	287	865	816	220	509	459	276	565	493	387	965	884	336	625	527
18	176	500	468	301	949	900	230	554	504	288	612	540	405	1053	972	350	674	576
19	184	545	513	315	1037	988	240	601	551	300	661	589	423	1145	1064	364	725	627
20	192	592	560	329	1129	1080	250	650	600	312	712	640	441	1241	1160	378	778	680
21	200	641	609	343	1225	1176	260	701	651	324	765	693	459	1341	1260	392	833	735
22	208	692	660	357	1325	1276	270	754	704	336	820	748	477	1445	1364	406	890	792
23	216	745	713	371	1429	1380	280	809	759	348	877	805	495	1553	1472	420	949	851
24	224	800	768	385	1537	1488	290	866	816	360	936	864	513	1665	1584	434	1010	912
25	232	857	825	399	1649	1600	300	925	875	372	997	925	531	1781	1700	448	1073	975
26	240	916	884	413	1765	1716	310	986	936	384	1060	988	549	1901	1820	462	1138	1040

Die wichtigsten Maßeinheiten der klassischen Antike

zum Gebrauch beim Rechnen mit römischen Zahlen.

Längenmaße

digitus (Fingerbreit)	= /XVI pes	= 1,86 cm
palmus (Handbreit)	= IV digiti	= 7,43 cm
pes (Fuß)	= XVI digiti	= 29,6985 cm
cubitus (Elle)	= I /II pedis	= 44,55 cm
gradus (Halbschritt)	= II /II pedis	= 74,246 cm
passus (Schritt)	= V pedis	= 1,485 m
actus	= XXIV passus	= 35,638 m
mille passus (Meile)	= M passus	= 1484,92 m = VIII stadii
plethrum	= /VI stadium (alexandrinisch)	= 30,935 m

Flächenmaße

pes quadratus (Quadratfuß)	= /CDLXXX actus simplex	= 8,82 dm ²
actus simplex	= /LX iugerum	= 42,336 m ²
iugerum (Morgen, Tagwerk, Joch, bebaubarer Anteil)	= I actus per II actus	= 25,4 a
centuria (Flur)	= C iugera	= 25,4 ha

Gewichtsmaße (nach einem Mittelwert antiker 10-Pfund Steine des Louvre und des Nationalmuseums Neapel in Übereinstimmung mit dem von Th. Mommsen angegebenen Goldpfund):

talent (= 60 minen)	= LXXX librae	= 26,194 kg
libra (Pfund)	= XII unciae	= 327,43 g
uncia (Unze)	= VI sextans = II semis	= 27,286 g
scrupel (= II obolos)	= /XXIV uncia	= 1,137 g

Hohlmaße (I amphora Wasser wiegt LXXX librae):

amphora (Kubikfuß)	= II urnae = XLVIII sextarii	= 26,194 l
urna (Eimer)	= /II amphora	= 13,1 l
congius (Chus, Krug)	= /IV urna	= 3,27 l
sextarius	= /VI congius	= 0,5457 l
hemina (Kotyle)	= /II sextarius	= 0,273 l
quartarius	= /IV sextarius	= 0,136 l
ciatus (Schnapsglas)	= /III quartarius	= 4,55 cl
modius (für Trockenenes)	= XVI sextarii	= 8,731 l
medimnus	= VI modii = XCVI sextarii	= 52,388 l
culeus	= X medimni	= 5,239 hl

Münzen

Münzen wurden anfangs gegossen und, wie gesetzlich vorgeschrieben (C. 10,72,1), gewogen und nur mit gutem Glauben gezählt.

as, ursprünglich I libra Kupfererz, um 486 a.u.c. IV unciae Kupfer, um 702 a.u.c. I uncia Kupfer, zuletzt (lex Papiria 841 a.u.c.)	= /II uncia Kupfer
sestertius, I uncia Messing, (aber: I sestertium = M sestertii)	= II /II asses (später IV asses)
denarius, zuerst /VI, später /VIII, zuletzt /X uncia Silber	= XX asses (zuerst X, später XVI asses)
tetradrachmon, /II uncia Silber (= /XXXII stater in Gold)	= III denarii
aureus, /XL libra, ab 810 a.u.c. /XLIV libra Gold (= C sestertii)	= XXV denarii
solidus (Dukat) = /VI uncia Gold (gesetzlich Rom 367, C. 10,71,5)	= 4,548 g Gold
= XXIV siliqua zu /X uncia Silber	
= /V libra Silber, (gesetzlich Constantinopel 397, C. 10,77,1)	
= 20 librae Kupfer (gesetzlich Mailand 396, C. 10,29,1)	